



А.А. Берсенов
Н.В. Сафонова

ГЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЯ





А. А. Берсенева
Н. В. Сафонова

ГЕОМЕТРИЯ

9 класс

Учебник

*Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации*

2-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
Санкт-Петербург
Санкт-Петербургский филиал
издательства «Просвещение»
2022



УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721
Б48

Серия «Сферы» основана в 2003 году

На учебник получены **положительные** заключения
научной (заключение РАО № 1143 от 19.11.2016 г.),
педагогической (заключение РАО № 1034 от 21.11.2016 г.)
и **общественной** (заключение РКС № 518-ОЭ от 19.12.2016 г.) экспертиз.

Издание выходит в pdf-формате

Берсенева, Александр Анатольевич.

Б48 Геометрия. 9 класс : учебник : издание в pdf-формате / А. А. Берсенева, Н. В. Сафонова. — 2-е изд., стер. — Москва : Просвещение ; Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский филиал издательства «Просвещение», 2022. — 175, [1] с. : ил. — (Сферы).

ISBN 978-5-09-101274-3 (электр. изд.). — Текст: электронный.

ISBN 978-5-09-091288-4 (печ. изд.).

Данный учебник завершает линию учебно-методических комплексов «Сферы» по геометрии для 7–9-х классов. Издание подготовлено в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом и освещает вопросы курса геометрии для основной школы. В разноуровневой системе заданий представлены, наряду с традиционными, практико-ориентированные, исследовательские и проектные задания; отмечены задания, которые можно выполнять в компьютерной среде, в заданиях к каждому параграфу есть рубрика «Готовимся к экзамену». Богатый иллюстративный ряд, сопровождающий тексты учебника, отражает применение изучаемого материала в практической жизни. Такая система представления учебного материала способствует повышению мотивации к обучению, полноценному освоению учебного предмета, эффективному формированию УУД, качественной подготовке к ОГЭ и ЕГЭ.

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-09-101274-3 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-091288-4 (печ. изд.)

© Издательство «Просвещение», 2019
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2019
Все права защищены

СОДЕРЖАНИЕ

Работаем с учебником	4
Повторение	5

Глава 1

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1.1. Тригонометрические функции угла от 0° до 180°	18
1.2. Теорема косинусов	22
1.3. Теорема синусов	26
1.4. Решение треугольников	28
1.5. Применение тригонометрических функций к вычислению площадей	32
Решаем задачи	34
Подведём итоги	46

Глава 2

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

2.1. Многоугольники	48
2.2. Правильные многоугольники	52
2.3. Длина окружности	56
2.4. Площадь круга	58
Решаем задачи	60
Подведём итоги	72

Глава 3

МЕТОД КООРДИНАТ

3.1. Декартова система координат	74
3.2. Уравнение окружности	78
3.3. Уравнение прямой	80
3.4. Координатный метод	84
Решаем задачи	88
Подведём итоги	96

Глава 4

ВЕКТОРЫ

4.1. Вектор	98
4.2. Координаты вектора	102
4.3. Сложение векторов	104
4.4. Разность векторов	108
4.5. Умножение вектора на число	110
4.6. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	112
4.7. Применение векторов к решению задач	114
4.8. Скалярное произведение векторов	116
4.9. Применение скалярного произведения к решению задач	120
Решаем задачи	122
Подведём итоги	138

Глава 5

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

5.1. Движение	140
5.2. Осевая симметрия	144
5.3. Параллельный перенос	146
5.4. Поворот	148
5.5. Преобразования подобия	150
Решаем задачи	154
Подведём итоги	164
Выполняем тест	165
Проекты. Список литературы	174
Таблица значений тригонометрических функций	175

РАБОТАЕМ С УЧЕБНИКОМ

Учебник состоит из пяти глав, каждая из которых разделена на параграфы.

Параграф начинается с вводной рубрики «ВЫ УЗНАЕТЕ» и вступительного текста, содержащего основную идею параграфа. Рубрика «Вы узнаете» познакомит вас с основными вопросами, которые изучаются в параграфе.

На страницах учебника вы встретите рубрики, которые помогут вам лучше понять изучаемый материал.

Рубрика «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ БЛОКНОТ» содержит интересный дополнительный материал.

Рубрика «В ФОКУСЕ» содержит примеры решения опорных задач. Запись решения можно рассматривать как один из образцов оформления решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Так обозначаются определения.

ТЕОРЕМА ▼

Так обозначаются теоремы.

Завершает каждый параграф рубрика «ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ», которая поможет вам усвоить материал параграфа.

В конце главы представлена система задач к каждому параграфу.



Так обозначены номера заданий базового уровня.



Так обозначены номера заданий более сложного уровня.



Буквой «К» обозначены задания, которые можно выполнять на компьютере.



Буква «Т» означает, что аналогичное задание есть в тетради-тренажёре.



Задачи этой рубрики помогут вам более глубоко погрузиться в геометрический материал.

Каждая глава заканчивается рубрикой «ПОДВЕДЁМ ИТОГИ», вопросы которой помогут вам систематизировать знание материала главы.

ПОВТОРЕНИЕ

Дорогие девятиклассники!

Мы продолжаем изучать свойства геометрических фигур. Желаем вам успехов и радости познания! Но прежде чем перейти к изучению нового, вспомним основные утверждения, изученные ранее.

СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

1. Углы ABC и CBD на рисунке 1 — смежные.

Сумма смежных углов равна 180° .

2. Углы 1 и 2, а также 3 и 4 на рисунке 2 — вертикальные.

Вертикальные углы равны.

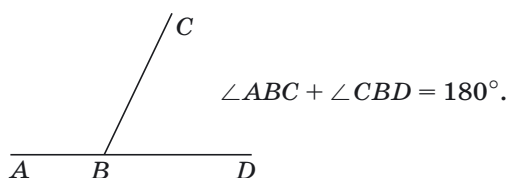


Рис. 1

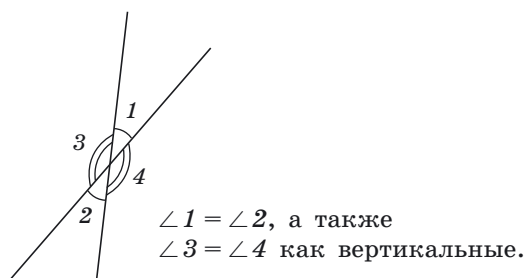


Рис. 2

ТРЕУГОЛЬНИКИ Треугольники называются равными, если их можно совместить наложением.

В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, и наоборот, против равных углов лежат равные стороны. Равные элементы называются соответствующими. Так, на рисунке 3 стороны AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 соответствующие; углы A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 соответствующие.

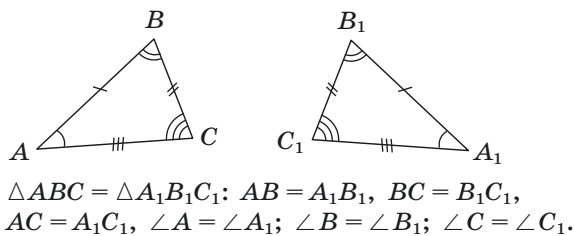


Рис. 3

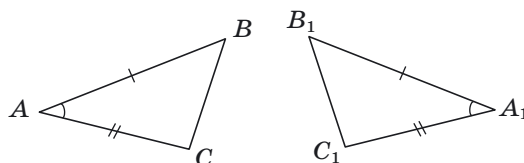


Рис. 4

Признаки равенства треугольников.

1-й признак. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 4).

2-й признак. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 5).

3-й признак. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 6).

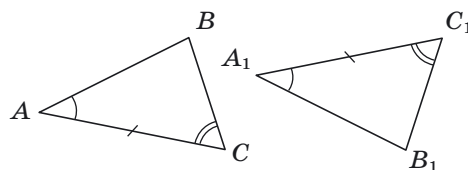


Рис. 5

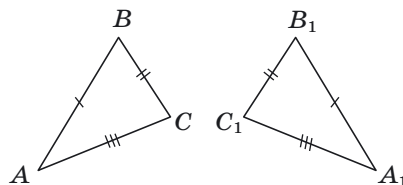


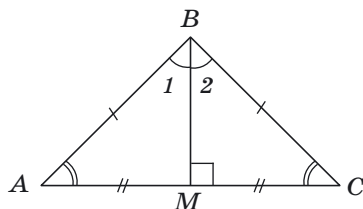
Рис. 6

Равнобедренный треугольник. Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны (рис. 7).

Свойства равнобедренного треугольника:

— углы при основании равнобедренного треугольника равны;

— биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является его медианой и высотой (рис. 8).



1. Если $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$.
2. Если $AB = BC$ и $\angle 1 = \angle 2$, то $AM = CM$, $BM \perp AC$.

Рис. 8

Признаки равнобедренного треугольника:

Треугольник является равнобедренным, если:

- два угла треугольника равны;
- медиана является его высотой или биссектрисой;
- биссектриса является его высотой или медианой;
- высота является его медианой или биссектрисой.

Также мы будем опираться на следующие теоремы:

1) В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и наоборот: против большего угла лежит бо́льшая сторона (рис. 9).

2) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

3) Сумма углов треугольника равна 180° .

4) Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (рис. 10).

Прямоугольный треугольник. Треугольник, один из углов которого равен 90° , называется прямоугольным (рис. 11).

Признаки равенства прямоугольных треугольников.

Прямоугольные треугольники равны:

- по двум катетам;
- по катету и прилежащему к нему острому углу;
- по катету и противолежащему ему острому углу;
- по гипотенузе и острому углу;
- по гипотенузе и катету.

В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы (рис. 12).

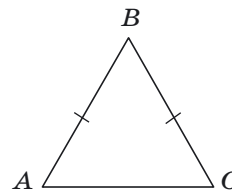
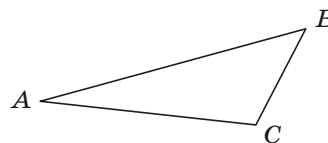


Рис. 7



1. Если $AB > BC$, то $\angle C > \angle A$.
2. Если $\angle C > \angle A$, то $AB > BC$.

Рис. 9

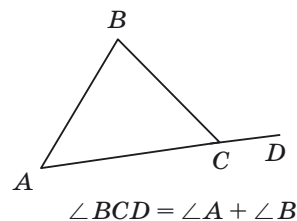


Рис. 10

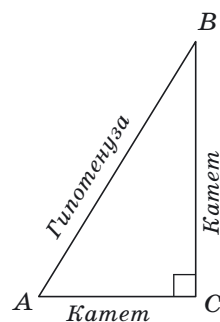
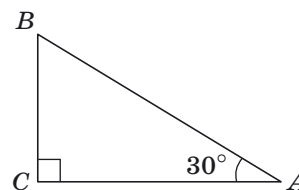


Рис. 11



$$BC = \frac{1}{2} AB.$$

Рис. 12

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ

Через любую точку плоскости проходит единственная прямая, перпендикулярная данной прямой (рис. 13).

Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются (рис. 14).

Аксиома параллельных прямых: **через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной** (рис. 15).

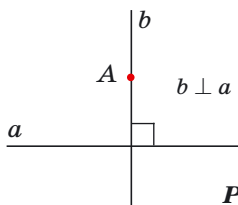


Рис. 13

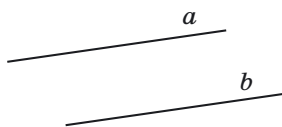


Рис. 14

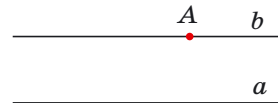


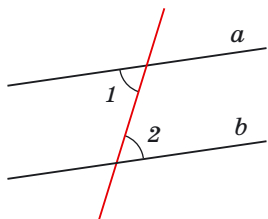
Рис. 15

Признаки параллельности двух прямых:

— если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (рис. 16);

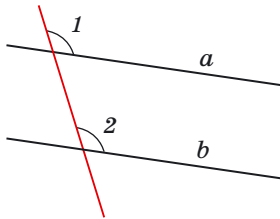
— если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны (рис. 17);

— если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180° , то такие прямые параллельны (рис. 18);



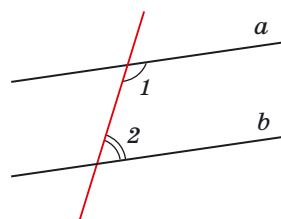
Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$.

Рис. 16



Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$.

Рис. 17

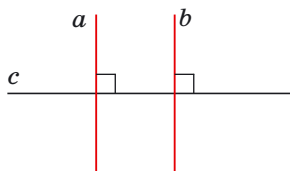


Если $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, то $a \parallel b$.

Рис. 18

— две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны (рис. 19);

— две прямые, параллельные третьей, параллельны (рис. 20).



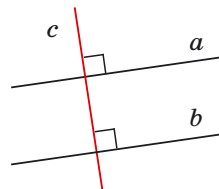
Если $a \perp c$, $b \perp c$, то $a \parallel b$.

Рис. 19



Если $a \parallel b$ и $c \parallel b$, то $a \parallel c$.

Рис. 20



Если $a \parallel b$, $c \perp a$, то $c \perp b$.

Рис. 21

Свойства параллельных прямых.

Если параллельные прямые пересечены секущей, то:

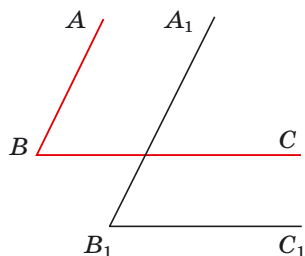
- накрест лежащие углы равны;
- соответственные углы равны;
- сумма односторонних углов равна 180° .

Если прямая перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямой (рис. 21).

Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

Углы с соответственно параллельными сторонами равны или в сумме составляют 180° (рис. 22).

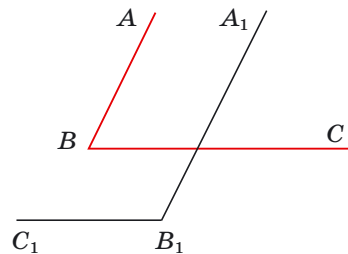
а)



Если $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$, то $\angle B = \angle B_1$.

Рис. 22

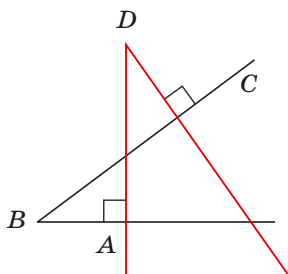
б)



Если $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, то $\angle B + \angle B_1 = 180^\circ$.

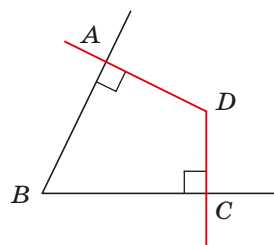
Углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны или в сумме составляют 180° (рис. 23).

а)



Если $BA \perp DA$; $BC \perp DC$, то $\angle B = \angle D$.

б)



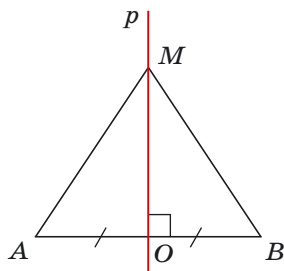
Если $BA \perp DA$; $BC \perp DC$, то $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Рис. 23

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

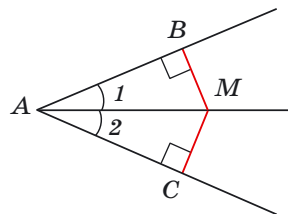
1. Серединный перпендикуляр к отрезку является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов этого отрезка (рис. 24).

2. Биссектриса угла является геометрическим местом точек, равноудалённых от сторон угла (рис. 25).



Если $MO \perp AB$ и $AO = OB$, то $AM = BM$.

Рис. 24



Если $\angle 1 = \angle 2$ и $MB \perp AB$, $MC \perp AC$, то $BM = CM$.

Рис. 25

ОКРУЖНОСТЬ

Никакие три точки окружности не лежат на одной прямой.

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания (рис. 26).

Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и образуют с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности, равные углы (рис. 27).

Градусную меру всей окружности считают равной 360° (рис. 28).

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается (рис. 29).

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой (рис. 30).

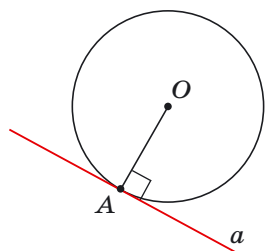


Рис. 26

Прямая a — касательная, $OA \perp a$.

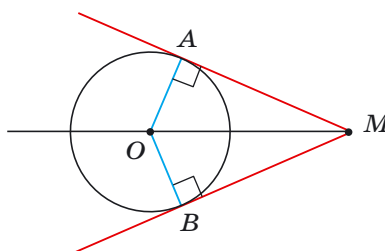
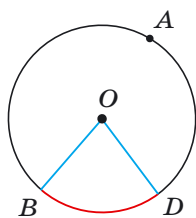


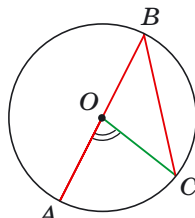
Рис. 27

MA и MB — касательные, $MA = MB$,
 $\angle AMO = \angle BMO$.



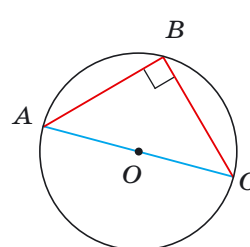
$\angle BOD$ — центральный угол.
 $\angle BOD = \cup BD$. $\cup BAD = 360^\circ - \cup BD$.

Рис. 28



$\angle ABC$ — вписанный угол.
 $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC$.

Рис. 29



$ABC = 90^\circ$.

Рис. 30

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 31).

Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, измеряется половиной дуги, заключённой внутри этого угла (рис. 32).

Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам (рис. 33).

Дуги, заключённые между параллельными хордами, равны (рис. 34).

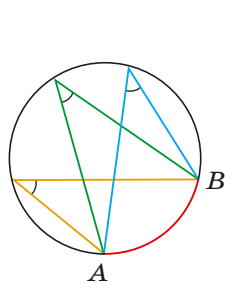


Рис. 31

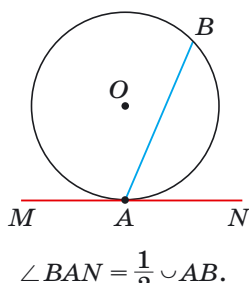
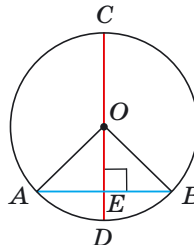
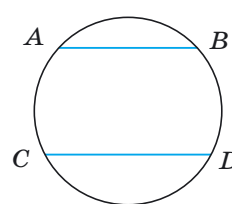


Рис. 32



Если $CD \perp AB$, то $AE = BE$.

Рис. 33



Если $AB \parallel CD$,
то $\cup AC = \cup BD$.

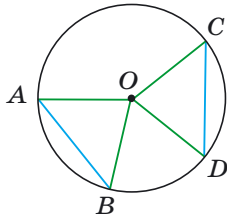
Рис. 34

Если дуги равны, то равны и стягивающие их хорды (рис. 35).

В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну (рис. 36).

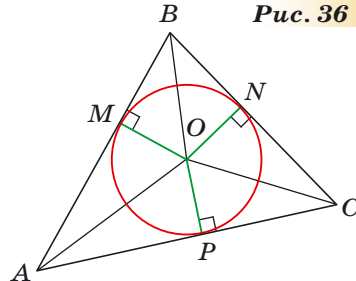
Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну (рис. 37).

Рис. 35



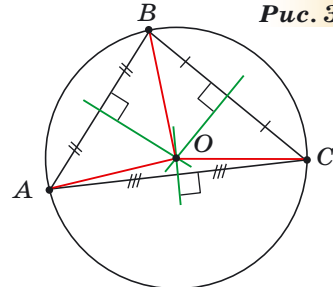
Если $\cup AB = \cup CD$,
то $AB = CD$.

Рис. 36



O — точка пересечения бисектрис треугольника — центр вписанной окружности.

Рис. 37

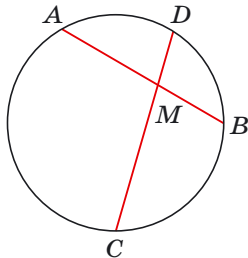


O — точка пересечения средних перпендикуляров к сторонам треугольника — центр описанной окружности.

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды (рис. 38).

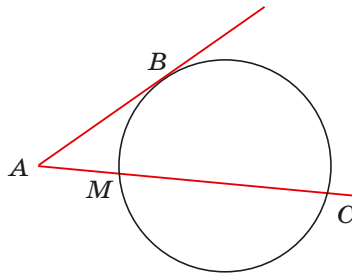
Если через точку A проведены к окружности касательная AB и секущая, пересекающая окружность в точках C и M , то $AB^2 = AM \cdot AC$ (рис. 39).

Произведение диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон (рис. 40).



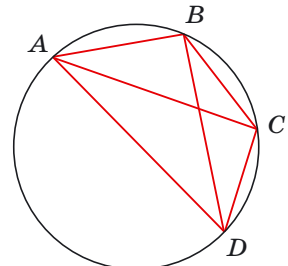
$$AM \cdot BM = CM \cdot DM.$$

Рис. 38



$$AB^2 = AM \cdot AC.$$

Рис. 39



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Рис. 40

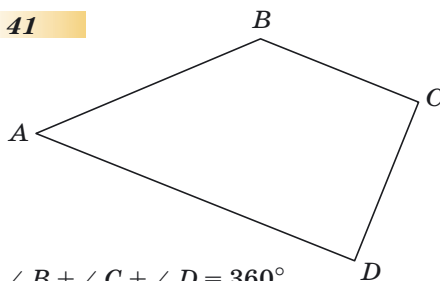
ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

Сумма углов четырёхугольника равна 360° (рис. 41).

Параллелограмм.

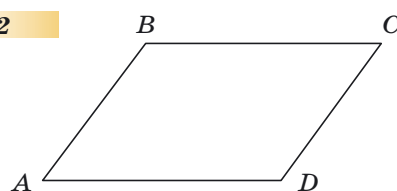
Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется **параллелограммом** (рис. 42).

Рис. 41



$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ.$$

Рис. 42

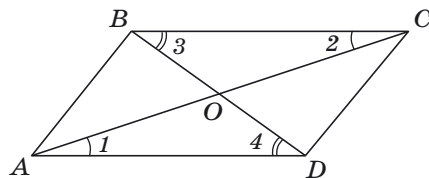


$$AB \parallel CD, BC \parallel AD.$$

Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Свойства параллелограмма:

- противоположные стороны параллельны;
- противоположные стороны равны;
- противоположные углы равны;
- углы, прилежащие одной стороне, в сумме составляют 180° ;
- диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника;
- диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам (рис. 43).



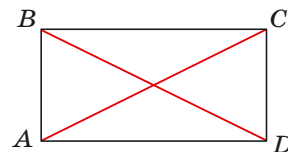
$ABCD$ — параллелограмм.
 $AO = OC$, $BO = OD$.

Рис. 43

Точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

Признаки параллелограмма:

- если две стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм;
- если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм;
- если диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.



$ABCD$ — прямоугольник,
 $AC = BD$.

Рис. 44

Прямоугольник и его свойства.

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется **прямоугольником**.

Диагонали прямоугольника равны (рис. 44).

Признаки прямоугольника:

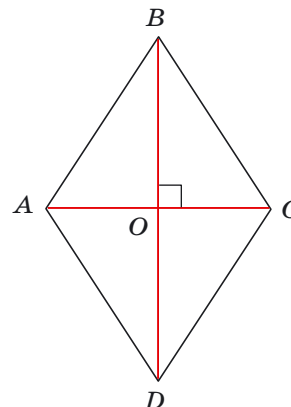
- если у параллелограмма один угол прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник;
- если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник;
- четырёхугольник, у которого все углы прямые, — прямоугольник.

Ромб и его свойства.

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется **ромбом**.

Диагонали ромба:

- взаимно перпендикулярны;
- делят углы ромба пополам (рис. 45).



$ABCD$ — ромб. $AC \perp BD$,
 $\angle ABO = \angle CBO$.

Рис. 45

Признаки ромба.

- если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб;
- если диагональ параллелограмма делит его угол пополам, то этот параллелограмм — ромб;
- если в четырёхугольнике все стороны равны, то этот четырёхугольник — ромб.

Квадрат и его свойства.

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется **квадратом**.

Диагонали квадрата равны, перпендикулярны и делят его углы пополам (рис. 46).

Трапеция.

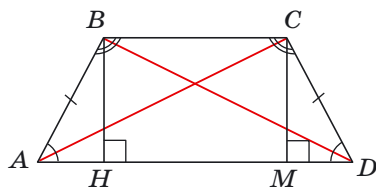
Четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — нет, называется **трапецией** (рис. 47).

Трапеция называется **прямоугольной**, если один из её углов прямой.

Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны.

В равнобедренной трапеции равны:

- углы при каждом основании;
- диагонали (рис. 48).



$AB = CD$, $ABCD$ — равнобедренная трапеция.
 $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$, $AC = BD$.

Рис. 48

Средняя линия трапеции.

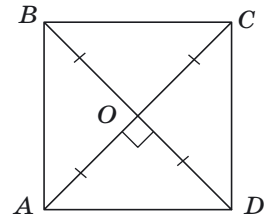
Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется **средней линией трапеции** (рис. 49).

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Средняя линия треугольника.

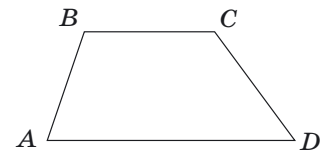
Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией треугольника** (рис. 50).

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна её половине.



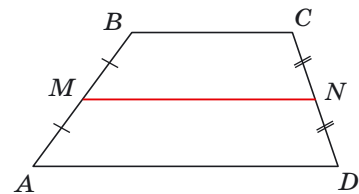
$ABCD$ — квадрат. $AC = BD$,
 $AC \perp BD$, $\angle ABD = \angle CBD$.

Рис. 46



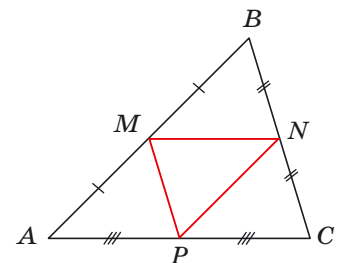
$BC \parallel AD$, $AB \nparallel CD$.
 Четырёхугольник $ABCD$ — трапеция.

Рис. 47



MN — средняя линия трапеции $ABCD$.

Рис. 49



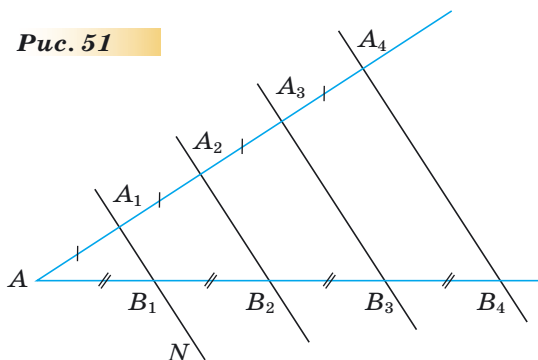
MN , PN , PM — средние линии треугольника ABC .

Рис. 50

Теорема Фалеса.

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне (рис. 51).

Рис. 51



Если $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \dots$ и $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 \dots$, то $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 \dots$.

Вписанные и описанные четырёхугольники.

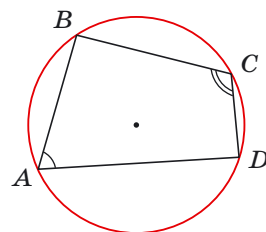
В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180° (рис. 52).

Около любого прямоугольника можно описать окружность.

Около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность.

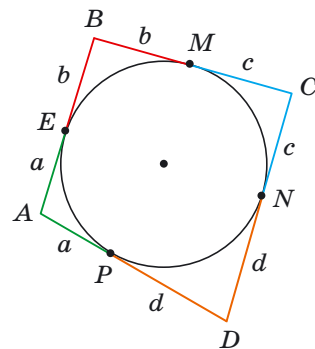
В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 53).

В любой ромб можно вписать окружность.



Четырёхугольник $ABCD$ — вписанный.
 $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$.

Рис. 52



$$AB + CD = BC + AD.$$

Рис. 53

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

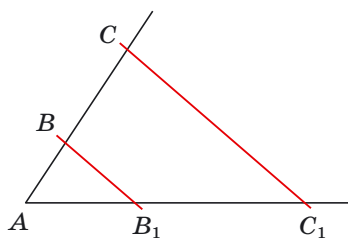
Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки (рис. 54).

Подобные треугольники.

Два треугольника называются **подобными**, если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, а соответственные стороны пропорциональны (рис. 55).

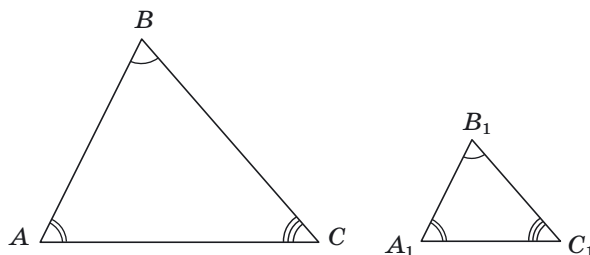
Равные треугольники также считаются подобными с коэффициентом подобия, равным 1.

Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.



Если $BB_1 \parallel CC_1$, то $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}$.

Рис. 54



$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1.$$

Рис. 55

Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая другие стороны, отсекает треугольник, подобный данному (рис. 56).

Первый признак подобия треугольников.

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Второй признак подобия треугольников.

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Третий признак подобия треугольников.

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам (рис. 57).

Замечательные точки треугольника.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

К замечательным точкам треугольника относятся:

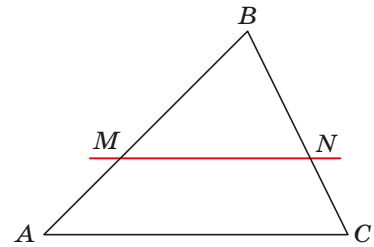
- точка пересечения биссектрис;
- точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;
- точка пересечения медиан;
- точка пересечения высот или их продолжений.

Прямоугольный треугольник.

Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит треугольник на два треугольника, подобных друг другу и исходному (рис. 58).

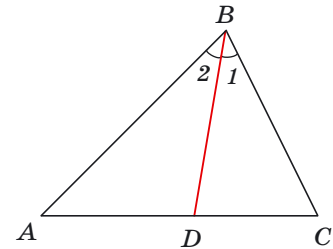
Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике (рис. 59):

- в прямоугольном треугольнике квадрат высоты, проведённой к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу;
- квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.



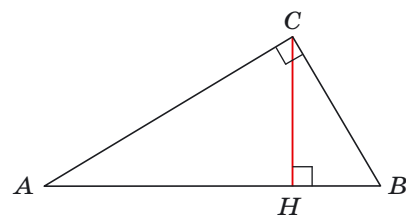
$$MN \parallel AC, \triangle MBN \sim \triangle ABC.$$

Рис. 56



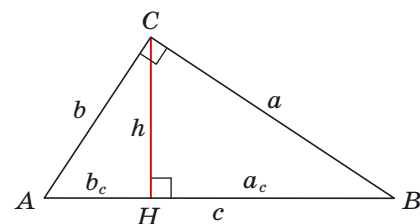
$$\angle 1 = \angle 2, \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}.$$

Рис. 57



$$\triangle ACH \sim \triangle CBH \sim \triangle ABC.$$

Рис. 58



$$h^2 = a_c \cdot b_c; b^2 = c \cdot b_c; a^2 = c \cdot a_c.$$

Рис. 59

Отрезок MN называют **средним геометрическим** отрезков AB и CD , если

$$MN^2 = AB \cdot CD.$$

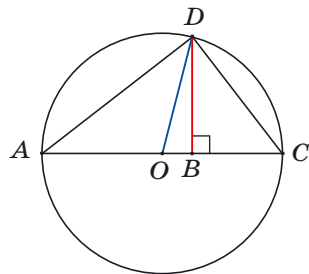
Средним арифметическим двух отрезков называют отрезок, длина которого равна полусумме длин этих отрезков.

Среднее арифметическое двух отрезков не меньше их среднего геометрического (рис. 60).

Теорема Пифагора.

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (рис. 61).

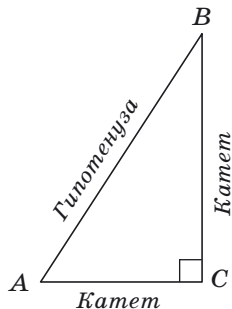
Любая наклонная больше перпендикуляра и больше своей проекции (рис. 62).



BD — среднее геометрическое отрезков AB и BC .
 OD — среднее арифметическое отрезков AB и BC .

$$\frac{AB + BC}{2} \geq \sqrt{AB \cdot BC}.$$

Рис. 60



$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Рис. 61

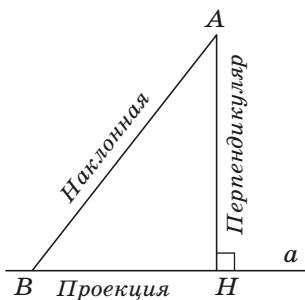


Рис. 62

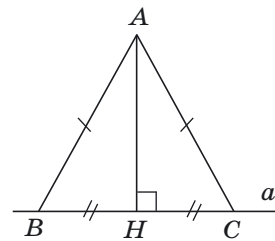


Рис. 63

Если к прямой проведены наклонные из одной точки, тогда:

— равные наклонные имеют равные проекции, и наоборот: если проекции наклонных равны, то равны и сами наклонные (рис. 63);

— бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию, и наоборот: из двух наклонных больше та, у которой больше проекция (рис. 64).

Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике (рис. 65).

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}; \quad \cos \alpha = \frac{AC}{AB}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{AC}{BC}.$$

Основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

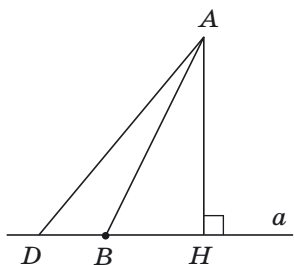


Рис. 64

$$DH > BH, AD > AB.$$

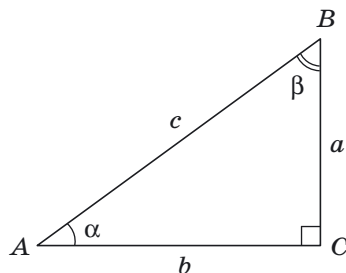
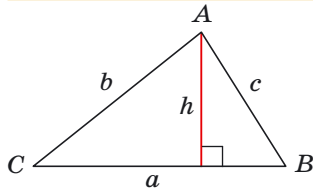


Рис. 65

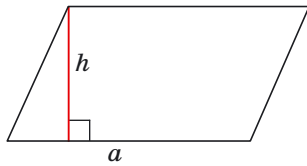
ПЛОЩАДЬ



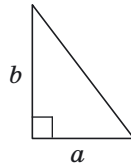
$$S = \frac{1}{2} ah; \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

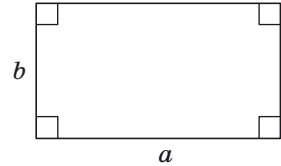
$$S = p \cdot r, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}$$



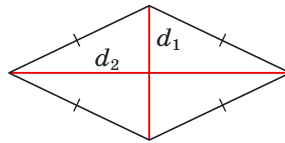
$$S = ah$$



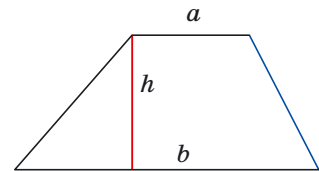
$$S = \frac{1}{2} ab$$



$$S = ab$$



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$



$$S = \frac{a+b}{2} h$$

ТЕОРЕМЫ

В формулировке теоремы присутствуют две части: первая часть — условие теоремы (то, что дано), вторая часть — заключение (то, что требуется доказать).

Так, в теореме «Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам» в условии нам дан параллелограмм, а заключение — «диагонали точкой пересечения делятся пополам».

Если в этой теореме поменять местами условие и заключение, то получим теорему, обратную данной: «Если диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм».

Одну из теорем называют прямой теоремой, а другую называют обратной теоремой.

Если верны обе теоремы, то такие теоремы называют взаимно-обратными.

Следует быть очень внимательным, меняя местами условие теоремы и заключение, так как обратное утверждение не всегда верно.

Например, прямая теорема: «Если дуги равны, то равны и стягивающие их хорды». Обратное утверждение: «Если хорды равны, то равны и дуги, стягивающие эти хорды» — неверно (рис. 66).

Теоремы делятся на два класса — **теоремы-свойства** и **теоремы-признаки**.

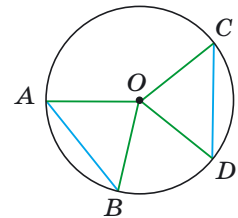
Например, теорема-свойство: «Диагонали прямоугольника равны»; теорема-признак: «Если диагонали параллелограмма равны, то такой параллелограмм является прямоугольником».

Маленькие теоремы, предваряющие большую теорему, называют **леммами**.

Теоремы, которые следуют непосредственно из теорем, называют **теоремами-следствиями** или просто **следствиями**.

Так, следствием теоремы «Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается» является теорема «Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны».

С соседом по парте или в команде рассмотрите представленные выше теоремы и укажите, какие из них являются: а) теоремами-свойствами; б) теоремами-признаками; в) теоремами-следствиями; г) взаимно-обратными теоремами.



$AB = CD$,
но $\sphericalangle AOB \neq \sphericalangle COD$.

Рис. 66

ГЛАВА

1

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

- ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ
ФУНКЦИИ УГЛА
ОТ 0° ДО 180°
- ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ
- ТЕОРЕМА СИНУСОВ
- РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ
- ПРИМЕНЕНИЕ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ
ПЛОЩАДЕЙ

ИНТЕРЕСНО

Вам известно, что длина экватора приблизительно равна 40 000 км. В XV в. считалось, что она намного меньше. Так, Колумб, отправившись искать короткий путь в Индию и пристав к одному из Багамских островов, подумал, что он уже в Индии. Представьте: его ошибка превосходила ширину Америки и ширину Тихого океана! А вот древние греки ещё в III в. до н.э. знали эту величину гораздо лучше Колумба благодаря Эратосфену, измерившему окружность Земли с погрешностью около одного процента. Для этого ему было достаточно тени от столба и тригонометрии. Узнав, что в Сиене в полдень летнего солнцестояния вертикальный столб не отбрасывает тени, а в Александрии тень от столба есть, и предполагая, что солнечные лучи падают на Землю параллельно, Эратосфен понял, что на Сиену лучи падают вертикально, а на Александрию — под углом, что и приводило к появлению теней. Эратосфен измерил угол падения солнечного луча. Он установил, что этот угол равен приблизительно $7^\circ 12'$, или $1/50$ всей окружности. Угол этот равен углу воображаемого треугольника с вершинами в центре Земли, Сиене и Александрии. Расстояние от Сиены до Александрии составляет 5000 стадий. Исходя из этого, Эратосфен пришёл к заключению, что длина окружности Земли должна быть 250 000 стадий, что в переводе в километры составляет 39 675 км. Таким образом, ошибка Эратосфена не составляла и одного процента. Позднее он представил ещё более точный результат — 252 000 стадий. Это было выдающимся достижением того времени!

1.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют единичной полуокружностью
- Определение тригонометрических функций угла α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$

Рис. 1.1

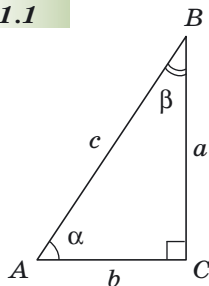


Рис. 1.2

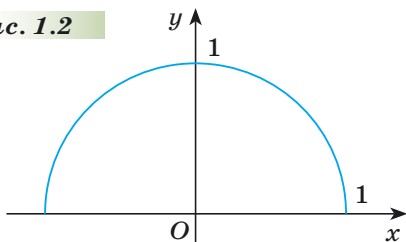


Рис. 1.3

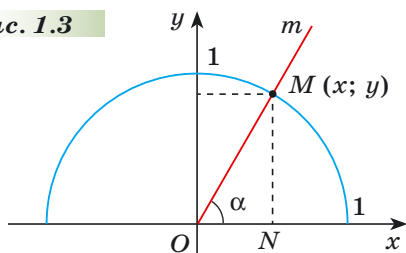
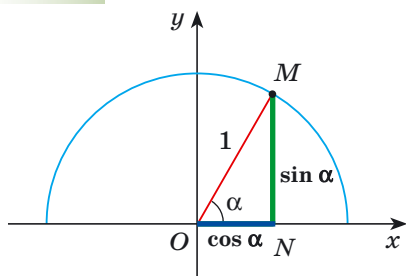


Рис. 1.4



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛА ОТ 0° ДО 180°

Понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла вам уже знакомы из курса геометрии 8 класса. С помощью этих тригонометрических функций вы решали прямоугольные треугольники.

Тригонометрические функции применяют и для нахождения неизвестных элементов произвольного треугольника. Но как быть, если один из углов треугольника — тупой?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ УГЛОВ

ОТ 0° ДО 180° В прямоугольном треугольнике (рис. 1.1) с катетами a и b , гипотенузой c и острым углом α :

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Введём понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

Для этого в прямоугольной системе координат построим окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1. Такая окружность называется **единичной**.

Рассмотрим половину окружности, расположенную в верхней полуплоскости относительно оси абсцисс (рис. 1.2). Её называют **единичной полуокружностью**.

Из начала координат, точки O , проведём луч m , пересекающий единичную полуокружность в точке $M(x; y)$. Обозначим буквой α угол, который образует луч m с положительной полуосью абсцисс (рис. 1.3).

В случае, если луч m совпадает с положительной полуосью абсцисс, будем считать, что $\alpha = 0^\circ$.

Пусть угол α — острый. Проведём перпендикуляр MN (рис. 1.3). Получим треугольник OMN с острым углом α , гипотенузой OM , равной 1, и катетами, длины которых равны: $ON = x$, $MN = y$, где x и y — координаты точки M . В треугольнике OMN имеем:

$$\sin \alpha = \frac{MN}{OM} = \frac{y}{1} = y, \quad \cos \alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{x}{1} = x, \text{ то есть}$$

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x. \quad (1)$$

Итак, синус острого угла α — это ордината y точки M , косинус острого угла α — это абсцисса x точки M (рис. 1.4).

Для прямого, тупого, развёрнутого угла и угла $\alpha = 0^\circ$ синус и косинус угла α определяются по тем же формулам (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Синусом угла α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) называют ординату соответствующей углу α точки M единичной полуокружности, косинусом угла α — абсциссу точки M .

Так как координаты $(x; y)$ точек единичной полуокружности заключены в промежутках $0 \leq y \leq 1$ и $-1 \leq x \leq 1$, то для любого угла α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, справедливы неравенства:

$$0 \leq \sin \alpha \leq 1; \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Если угол α — тупой, то абсцисса точки M , соответствующей этому углу, отрицательна (рис. 1.5). Следовательно, косинус тупого угла является числом отрицательным.

Найдём значения синуса и косинуса для углов 0° , 90° и 180° . Рассмотрим луч OM , соответствующий углу 0° (рис. 1.6). Абсцисса точки M равна 1, ордината равна 0. Значит,

$$\cos 0^\circ = 1; \quad \sin 0^\circ = 0.$$

Луч OM на рисунке 1.7 соответствует углу 90° . Так как точка M имеет координаты $M(0; 1)$, то

$$\cos 90^\circ = 0; \quad \sin 90^\circ = 1.$$

Луч OM на рисунке 1.8 соответствует углу 180° . Точка M имеет координаты $M(-1; 0)$, значит,

$$\cos 180^\circ = -1; \quad \sin 180^\circ = 0.$$

Кроме синуса и косинуса будем использовать тангенс и котангенс.

Рассмотрим угол α , такой, что $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тангенсом угла α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ и $\alpha \neq 90^\circ$, называют отношение $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, то есть

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (2)$$

$\operatorname{tg} \alpha$ не определён для $\alpha = 90^\circ$, так как $\cos 90^\circ = 0$, и знаменатель дроби $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ при этом обращается в ноль.

Найдём $\operatorname{tg} 0^\circ$ и $\operatorname{tg} 180^\circ$.

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0; \quad \operatorname{tg} 180^\circ = \frac{\sin 180^\circ}{\cos 180^\circ} = \frac{0}{-1} = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Котангенсом угла α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, называют отношение $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, то есть

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

Так как $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$, то $\operatorname{ctg} \alpha$ не определён для $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 180^\circ$.

$$\operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0.$$

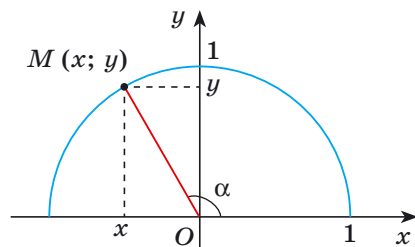


Рис. 1.5

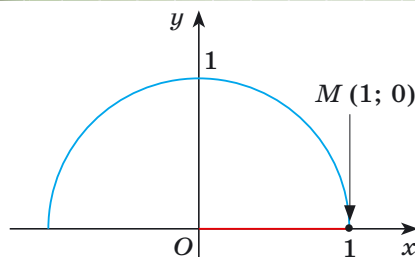


Рис. 1.6

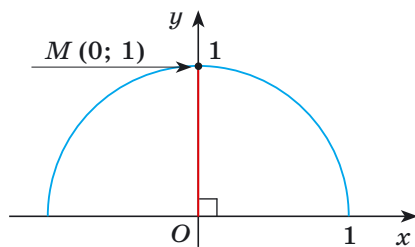


Рис. 1.7

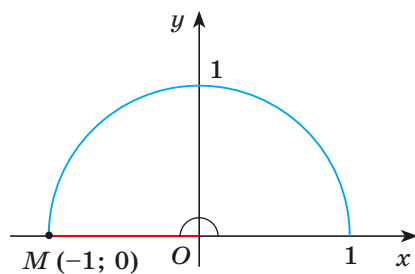


Рис. 1.8

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что для любого острого угла α выполняются равенства:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Эти равенства справедливы и для $\alpha = 0^\circ$, и для $\alpha = 90^\circ$. (Проверьте это самостоятельно.)

Рассмотрим теперь некоторые тождества для любого угла α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

Возьмём на единичной полуокружности точку $M(x_1; y_1)$, соответствующую углу α , и точку $N(x_2; y_2)$, соответствующую углу $(180^\circ - \alpha)$, и опустим перпендикуляры MA и NB на ось Ox (рис. 1.9).

Прямоугольные треугольники OMA и ONB равны по гипотенузе ($OM = ON = 1$) и острому углу ($\angle MOA = \angle NOB = \alpha$). Из равенства катетов BN и AM следует, что у точек N и M равны ординаты, а из равенства катетов OB и OA следует, что у точек N и M абсциссы противоположны, то есть

$$y_2 = y_1 \text{ и } x_2 = -x_1, \text{ значит,}$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Эти равенства верны и для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$. (Проверьте это самостоятельно.)

Обратите внимание на тот факт, что **все тригонометрические функции острого угла положительны;**

у тупого угла положителен только синус, а косинус, тангенс и котангенс — отрицательны.

Как вы знаете, равенство

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

называют **основным тригонометрическим тождеством**. В 8 классе оно было доказано для острых углов.

Это равенство справедливо и для углов $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$. (Убедитесь в этом самостоятельно.)

Докажем, что данное равенство справедливо и для тупых углов.

Пусть угол α тупой, тогда угол $(180^\circ - \alpha)$ — острый. Имеем:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= (\sin(180^\circ - \alpha))^2 + (-\cos(180^\circ - \alpha))^2 = \\ &= \sin^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, основное тригонометрическое тождество — $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ — выполняется для всех α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

Из определения тангенса и котангенса следует ещё одно тождество:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

где $\alpha \neq 0^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$, $\alpha \neq 180^\circ$.

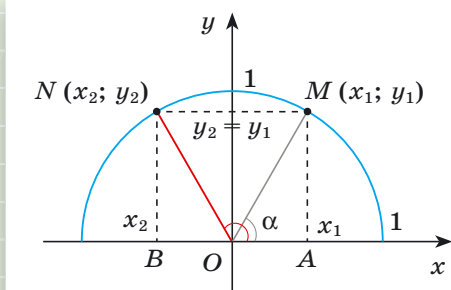


Рис. 1.9

НАХОЖДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ УГЛА α

Так же, как и для острого угла, для углов α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, зависимость значения синуса, косинуса, тангенса ($\alpha \neq 90^\circ$) и котангенса ($\alpha \neq 0^\circ$, $\alpha \neq 180^\circ$) от величины угла является функциональной, и синус, косинус, тангенс и котангенс угла α называют тригонометрическими функциями этого угла.



Задача 1. Вычислите значения тригонометрических функций угла 150° .

Решение. Из курса геометрии 8 класса нам известны значения тригонометрических функций угла 30° . Воспользуемся тем, что $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$:

$$\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{ctg} 150^\circ = \operatorname{ctg} (180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}.$$

Ответ: $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{ctg} 150^\circ = -\sqrt{3}$.

Нахождение значений тригонометрических функций многих углов, в отличие от угла 150° , представляет большую трудность, а так как на практике при различных вычислениях эти значения используются широко (например, в астрономии, мореплавании), то ещё с древних времён люди начали создавать специальные таблицы значений тригонометрических функций. Сейчас значения тригонометрических функций вычисляют с помощью калькулятора.

В таблице представлены значения тригонометрических функций некоторых углов α . Они часто используются при решении задач.

α	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какую полуокружность называют единичной?
- Может ли абсцисса точки единичной полуокружности быть равной $1/3$; $-0,4$; $3/2$; -1 ; $-3,5$? А ордината?
- В каком случае говорят, что углу α соответствует точка M единичной полуокружности? Назовите координаты точки M , если $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$.
- Что называют: а) синусом угла α ; где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$? б) косинусом угла α ; в) тангенсом угла α ; г) котангенсом угла α ?
- В каких пределах находятся значения $\sin \alpha$, если $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$?
- В каких пределах находятся значения $\cos \alpha$, если $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$?
- Каким числом — положительным или отрицательным — является синус острого угла? синус тупого угла? косинус острого угла? косинус тупого угла?
- Каким углом является угол α , если $\cos \alpha < 0$?
- Почему тангенс угла α не определён для $\alpha = 90^\circ$?
- Почему котангенс угла α не определён для $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 180^\circ$?
- Чему равен $\sin 0^\circ$? $\cos 0^\circ$? $\sin 90^\circ$? $\cos 90^\circ$? $\sin 180^\circ$? $\cos 180^\circ$? $\operatorname{tg} 0^\circ$? $\operatorname{ctg} 90^\circ$?
- Как выразить $\sin (180^\circ - \alpha)$ через $\sin \alpha$? $\cos (180^\circ - \alpha)$ через $\cos \alpha$?
- Верно ли, что если синусы двух углов равны, то равны и сами углы?
- Верно ли, что если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы?
- Как связаны между собой синус и косинус одного угла, тангенс и котангенс одного угла?
- Определите, чему равен угол α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, если точка M , соответствующая этому углу, имеет координаты:
а) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; б) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- Докажите, что тангенс любого острого угла больше тангенса любого тупого угла.

1.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Теорему косинусов
- Как определить вид треугольника, зная его стороны
- Как определить вид треугольника по знаку косинуса большего угла
- Каким соотношением связаны между собой диагонали и стороны параллелограмма

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Тригонометрические функции используются во многих геометрических теоремах и формулах. Рассмотрим одну из важнейших таких теорем, имеющую широкое применение. Так, например, теорема косинусов позволяет в треугольнике по известным двум сторонам и углу между ними найти его третью сторону.

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

ТЕОРЕМА. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и докажем, что

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C.$$

Угол C в треугольнике может быть острым, тупым или прямым. Рассмотрим все случаи.

1-й случай. Пусть $\angle C$ острый, тогда хотя бы один из углов, A или B , тоже острый, например A . В этом случае высота BH будет проходить внутри треугольника ABC (рис. 1.10).

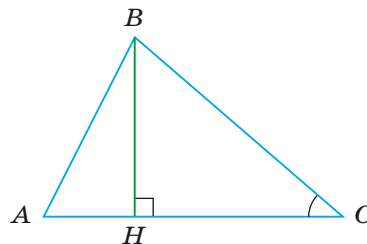


Рис. 1.10

В прямоугольном треугольнике HBC :

$$BH = BC \cdot \sin C, \quad HC = BC \cdot \cos C.$$

В прямоугольном треугольнике ABH :

$$\begin{aligned} AB^2 &= BH^2 + AH^2 = BH^2 + (AC - HC)^2 = \\ &= BH^2 + AC^2 - 2AC \cdot HC + HC^2 = \\ &= BC^2 \cdot \sin^2 C + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C + BC^2 \cdot \cos^2 C = \\ &= BC^2 (\sin^2 C + \cos^2 C) + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C = \\ &= BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C. \end{aligned}$$

Если в треугольнике ABC вторым острым углом окажется угол B , то нужно провести высоту из вершины A (рис. 1.11) и провести доказательство аналогично.

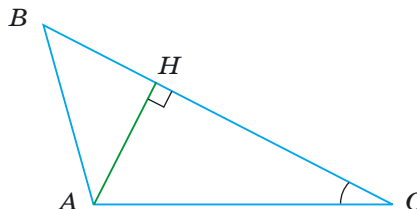


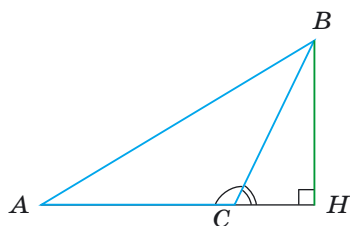
Рис. 1.11

1.2 ■ ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

23

2-й случай. $\angle C$ — тупой. В треугольнике ABC проведём высоту BH (рис. 1.12).

Рис. 1.12



В прямоугольном треугольнике CBH :

$$BH = BC \cdot \sin BCH = BC \cdot \sin (180^\circ - \angle ACB) = BC \cdot \sin ACB;$$

$$CH = BC \cdot \cos BCH = BC \cdot \cos (180^\circ - \angle ACB) = -BC \cdot \cos ACB.$$

В прямоугольном треугольнике AH :

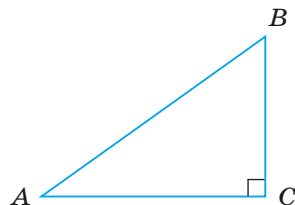
$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + BH^2 = (AC + CH)^2 + BC^2 \cdot \sin^2 ACB = \\ &= AC^2 + 2AC \cdot CH + CH^2 + BC^2 \cdot \sin^2 ACB = \\ &= AC^2 + 2AC \cdot (-BC \cdot \cos ACB) + (-BC \cdot \cos ACB)^2 + \\ &\quad + BC^2 \cdot \sin^2 ACB = \\ &= AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos ACB + BC^2 \cdot \cos^2 ACB + \\ &\quad + BC^2 \cdot \sin^2 ACB = \\ &= AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos ACB + BC^2 \cdot (\cos^2 ACB + \sin^2 ACB) = \\ &= AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos ACB. \end{aligned}$$

Таким образом, в треугольнике ABC

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

3-й случай. $\angle C$ — прямой (рис. 1.13). Тогда $\cos C = 0$ и нужно доказать, что $AB^2 = AC^2 + BC^2$, а это так и есть по теореме Пифагора. ▼

Рис. 1.13

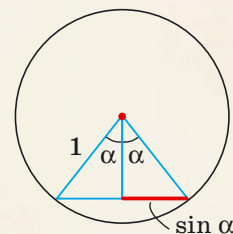


Воспользуемся обозначениями для сторон треугольника ABC (рис. 1.14) и запишем теорему косинусов, например, для стороны a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

Из доказательства теоремы косинусов видно, что теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов. Саму же теорему косинусов называют обобщённой теоремой Пифагора.

В Древней Греции вместо синуса угла рассматривали длину хорды, соответствующей удвоенному углу между радиусами единичной окружности. Практически это то же самое, так как синус угла равен половине такой хорды.



Позднее уже индийские математики и астрономы заменили хорды на полухорды, то есть линии синуса. Кстати, хорды индийские учёные называли «джива», что на санскрите означает «тетива лука».

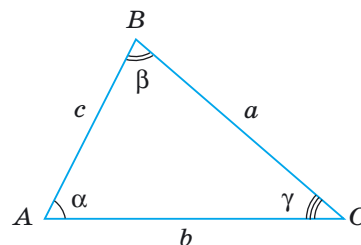
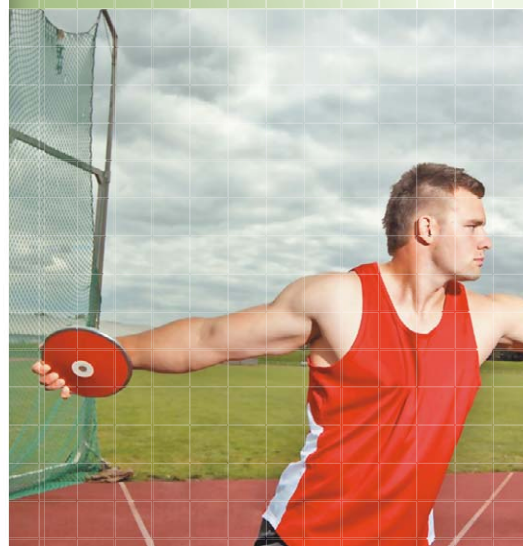
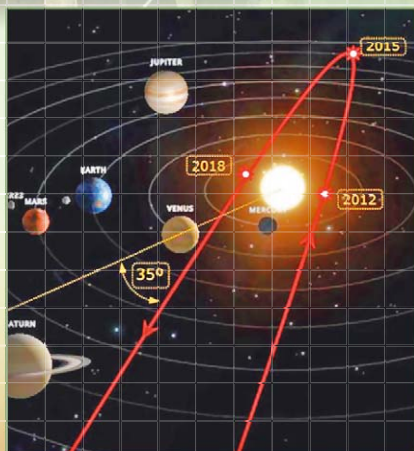


Рис. 1.14



Солнце

150 млн км

Земля

Луна

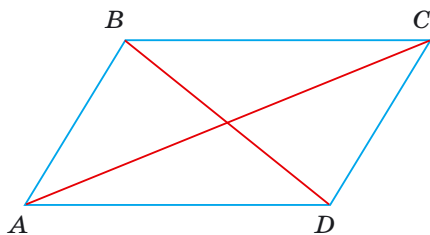


Рис. 1.15

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть a , b и c — стороны треугольника, причём сторона a — наибольшая. Тогда:

если $a^2 < b^2 + c^2$, то треугольник — остроугольный;

если $a^2 > b^2 + c^2$, то треугольник — тупоугольный;

если $a^2 = b^2 + c^2$, то треугольник — прямоугольный.

Докажите эти утверждения самостоятельно вместе с соседом по парте.

Таким образом, сравнив квадрат большей стороны треугольника с суммой квадратов двух других его сторон, мы можем определить вид треугольника.

С помощью теоремы косинусов можно найти косинус угла треугольника.

$$\text{Например, } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Так как косинус однозначно задаёт угол, то, зная знак косинуса наибольшего угла треугольника, мы можем определить вид этого треугольника.

Если косинус наибольшего угла треугольника положительный, то треугольник остроугольный.

Если косинус наибольшего угла треугольника отрицательный, то треугольник тупоугольный.

Если косинус наибольшего угла треугольника равен 0, то треугольник прямоугольный.

Рассмотрим ещё одно следствие из теоремы косинусов.

СЛЕДСТВИЕ 2. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Доказательство. В параллелограмме $ABCD$: AC и BD — диагонали (рис. 1.15).

Докажем, что

$$BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + AD^2).$$

Диагональ BD является стороной треугольника ABD . По теореме косинусов

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A. \quad (1)$$

Диагональ AC является стороной треугольника ABC . По теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B.$$

По свойству параллелограмма $\angle B = 180^\circ - \angle A$.

Тогда $\cos B = \cos(180^\circ - \angle A) = -\cos A$. И так как $BC = AD$, имеем:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos B = \\ &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot (-\cos A) = \\ &= AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD \cdot \cos A. \end{aligned} \quad (2)$$

Сложив почленно равенства (1) и (2), получим:

$$\begin{aligned} BD^2 + AC^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A + AB^2 + \\ &+ AD^2 + 2AB \cdot AD \cdot \cos A = 2(AB^2 + AD^2). \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$



1.2 ■ ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

25

Пользуясь этим следствием, выведем формулу для вычисления длины медианы треугольника по трём его сторонам.



Задача. Как, зная стороны треугольника ABC , найти его медианы?

Решение. 1. Найдём медиану BM . Удвоив медиану BM , построим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$ (рис. 1).

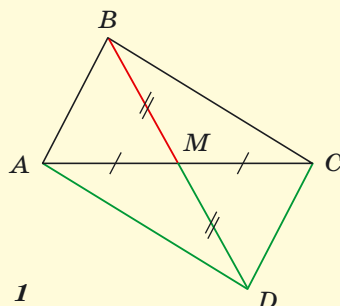


Рис. 1

В параллелограмме $ABCD$: $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$. Отсюда $BD^2 = 2(AB^2 + BC^2) - AC^2$.

$BM = \frac{1}{2} BD$, тогда

$$BM^2 = \left(\frac{1}{2} BD\right)^2 = \frac{1}{4} (2AB^2 + 2BC^2 - AC^2),$$

или

$$BM = \frac{1}{2} \sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}.$$

2. С помощью аналогичных дополнительных построений (рис. 2) и аналогичных рассуждений получим выражение для медианы AN :

$$AN = \frac{1}{2} \sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$$

и для медианы CP (рис. 3):

$$CP = \frac{1}{2} \sqrt{2AC^2 + 2BC^2 - AB^2}.$$

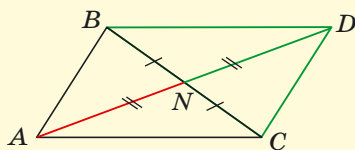


Рис. 2

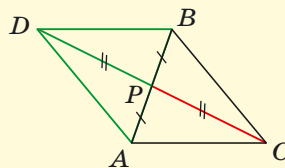


Рис. 3

Обозначим стороны треугольника через a , b , c , а медиану, проведённую, например, к стороне a , через m_a (рис. 4). Тогда формула, выражающая длину медианы через длины сторон треугольника, примет вид:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

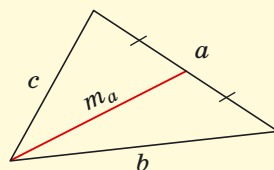
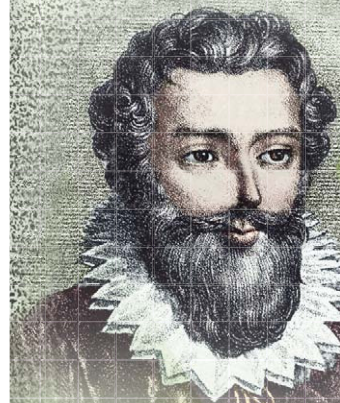


Рис. 4



Франсуа Виет (1540–1603), французский математик, основоположник символической алгебры, внёсший значительный вклад в развитие тригонометрии. Так, Виет первым сформулировал в словесной форме теорему косинусов.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте и докажите теорему косинусов.
- Остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник со сторонами a , b и c , где a – наибольшая сторона, если:
 - а) $a^2 = b^2 + c^2$;
 - б) $a^2 < b^2 + c^2$;
 - в) $a^2 > b^2 + c^2$?
- Могут ли два угла треугольника иметь отрицательные косинусы?
- Какой из углов треугольника ABC является наибольшим, если $BC^2 > AB^2 + AC^2$? Определите вид этого треугольника.
- Как связаны между собой диагонали и стороны параллелограмма?

1.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как найти хорду окружности, если известен диаметр и вписанный угол, опирающийся на эту хорду
- Теорему синусов
- Формулу радиуса описанной около треугольника окружности
- Как найти расстояние до недоступного предмета

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Рассмотрим ещё одну важнейшую теорему тригонометрии, позволяющую находить неизвестные стороны и углы треугольника.

ТЕОРЕМА СИНУСОВ Прежде чем перейти к доказательству теоремы синусов, докажем следующую лемму.

ЛЕММА. Хорда окружности равна произведению диаметра окружности на синус вписанного угла, опирающегося на эту хорду.

Доказательство. Пусть нам дана окружность с центром в точке O , хордой AB и диаметром AD . Докажем, что

$$AB = AD \sin \alpha.$$

Соединим отрезком точки D и B (рис. 1.16).

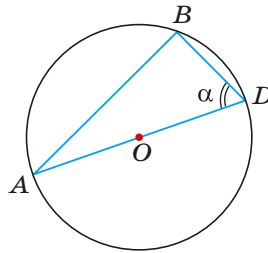


Рис. 1.16

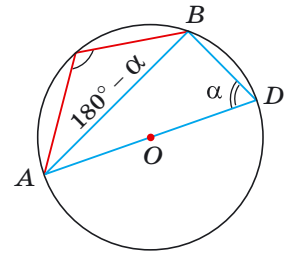


Рис. 1.17

Полученный треугольник ADB прямоугольный, так как $\angle ABD = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Пусть величина вписанного угла ADB , опирающегося на хорду AB , равна α , тогда

$$AB = AD \sin \alpha.$$

Полученное равенство справедливо для всех вписанных углов, опирающихся на хорду AB , так как все вписанные углы, опирающиеся на хорду AB , или равны α , или равны $(180^\circ - \alpha)$, а значит, синусы этих углов равны (рис. 1.17). ▼

Докажем теперь теорему синусов.

ТЕОРЕМА. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство. Пусть нам дан треугольник ABC . Докажем, что

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}.$$

Опишем около треугольника ABC окружность (рис. 1.18). Пусть радиус этой окружности равен R .

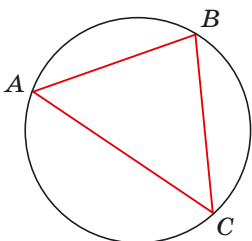


Рис. 1.18

1.3 ■ ТЕОРЕМА СИНУСОВ

27

Тогда по лемме:

$$AB = 2R \sin C; \quad AC = 2R \sin B; \quad BC = 2R \sin A.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R; \quad \frac{AC}{\sin B} = 2R; \quad \frac{BC}{\sin A} = 2R.$$

То есть

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}. \quad \blacktriangledown$$

Если стороны треугольника обозначить a , b и c (рис. 1.19), а противоположные им углы соответственно α , β и γ , то равенство можно записать так:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Отметим полезное свойство, следующее из доказательства теоремы:

радиус окружности, описанной около треугольника, можно вычислить по формуле:

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha},$$

где a — сторона треугольника, α — противоположный ей угол.

Теорема синусов позволяет по известным одной стороне и углам треугольника найти две другие стороны треугольника.

НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ДО НЕДОСТУПНОЙ ТОЧКИ С помощью теоремы синусов решаются практические задачи нахождения расстояния до недоступного предмета.

Пусть надо определить расстояние от данного пункта A до недоступного предмета, обозначенного точкой B на рисунке 1.20.



Рис. 1.20

В этом случае выбирают ещё один пункт — C , такой, чтобы можно было измерить расстояние AC . Измеряются также углы A и C , а затем по теореме синусов вычисляют расстояние AB .

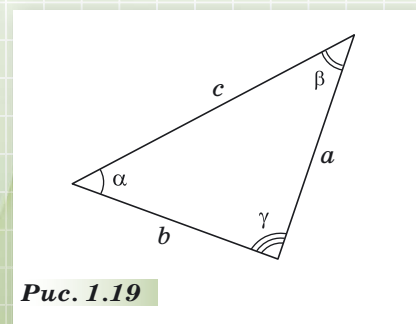


Рис. 1.19

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Как найти хорду окружности, если известны диаметр и вписанный угол, опирающийся на эту хорду?
- Сформулируйте и докажете теорему синусов.
- Как выражаются стороны треугольника через известную сторону и его углы?
- Дан треугольник ABC (рис. 1.19). Используя теорему синусов, запишите, чему равны отношения:
 $a : b$; $a : c$; $c : b$;
 $\sin A : \sin B$; $\sin C : \sin A$; $\sin B : \sin C$.
- Как найти радиус описанной около треугольника окружности, если известна сторона и противоположный ей угол треугольника?
- Какую практическую задачу позволяет решить теорема синусов?

1.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Как решать основные задачи на решение треугольников

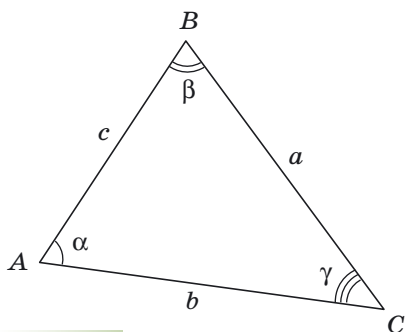


Рис. 1.21

Раздел математики, изучающий зависимость между сторонами и углами треугольника, называется *тригонометрией*. Тригонометрия – слово греческого происхождения и означает «измерение треугольников».

Полное исследование решения треугольников по трём данным элементам принадлежит Франсуа Виету. Так, известный до того своей трудностью случай решения треугольника по двум данным сторонам и одному из противолежащих им углов получил у Виета исчерпывающий анализ. Виет доказал, что в этом случае возможны как одно, так и два решения, а также решения может и не быть.

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Решить треугольник означает найти все его неизвестные элементы – углы и стороны – по известным.

КАК РЕШАТЬ ТРЕУГОЛЬНИКИ Решение треугольников основано главным образом на применении трёх теорем: теоремы косинусов, теоремы синусов и теоремы о сумме углов треугольника.

Для вычислений нам потребуется калькулятор или таблицы. Так как значения тригонометрических функций многих углов выражаются иррациональными числами (как и значения корней из многих чисел), то калькулятор будет выдавать приближённое значение величины с большим количеством знаков после запятой.

Для упрощения вычислений будем округлять значения тригонометрических функций до тысячных, значения длин – до десятых, значения углов – до единиц.

Для обозначения сторон и углов треугольника будем использовать принятые обозначения (рис. 1.21).

Разберём на примерах четыре задачи на решение треугольников.

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ

Задача 1. В треугольнике даны две стороны — $a = 5$ см, $b = 8$ см — и угол между ними $\gamma = 45^\circ$. Решить треугольник.

Решение.

1. Найдём третью сторону c треугольника по теореме косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \text{ Отсюда}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= (5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 45^\circ) \text{ см}^2 \approx \\ &\approx (25 + 64 - 80 \cdot 0,707) \text{ см}^2 \approx (89 - 56,56) \text{ см}^2 = 32,44 \text{ см}^2; \\ c &\approx \sqrt{32,44} \text{ см} \approx 5,7 \text{ см}. \end{aligned}$$

2. Найдём один из углов, например β . Применим ещё раз теорему косинусов:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta. \text{ Отсюда}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx \frac{25 + 32,44 - 64}{2 \cdot 5 \cdot 5,7} \approx \frac{-6,56}{57} \approx -0,115.$$

Значение β найдём с помощью калькулятора или таблицы:

$$\beta \approx 97^\circ.$$

3. Найдём угол α по теореме о сумме углов треугольника:

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) \approx 180^\circ - (45^\circ + 97^\circ) = 180^\circ - 142^\circ = 38^\circ.$$

Ответ: $c \approx 5,7$ см; $\alpha \approx 38^\circ$; $\beta \approx 97^\circ$.

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО СТОРОНЕ И ДВУМ УГЛАМ

Задача 2. Решите треугольник, если $a = 10$ см, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 50^\circ$.

Решение.

1. Найдём угол α по теореме о сумме углов треугольника:

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - (30^\circ + 50^\circ) = 100^\circ.$$

2. Найдём одну из неизвестных сторон, например b , по теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}; \text{ отсюда}$$

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \approx \frac{10 \cdot 0,5}{0,985} \text{ см} \approx 5,1 \text{ см}.$$

3. Найдём третью сторону c по теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}; \text{ отсюда}$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \approx \frac{10 \cdot 0,766}{0,985} \text{ см} \approx 7,8 \text{ см}.$$

Ответ: $b \approx 5,1$ см, $c \approx 7,8$ см, $\alpha = 100^\circ$.

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЁМ СТОРОНАМ

Задача 3. В треугольнике даны три стороны: $a = 7$ см, $b = 6$ см, $c = 5$ см. Решить треугольник.

Решение.

1. Определим вид треугольника. Большая сторона a .

Так как $a^2 < b^2 + c^2$, то данный треугольник остроугольный.

2. Найдём один из углов треугольника, например α , по теореме косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha; \text{ отсюда}$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 25 - 49}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{12}{60} = 0,2.$$

С помощью калькулятора находим, что $\alpha \approx 78^\circ$.

3. Найдём угол β по теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}; \text{ отсюда}$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} \approx \frac{6 \cdot 0,978}{7} \approx 0,838.$$

Этому значению синуса соответствуют два угла: примерно 57° и $(180^\circ - 57^\circ)$.

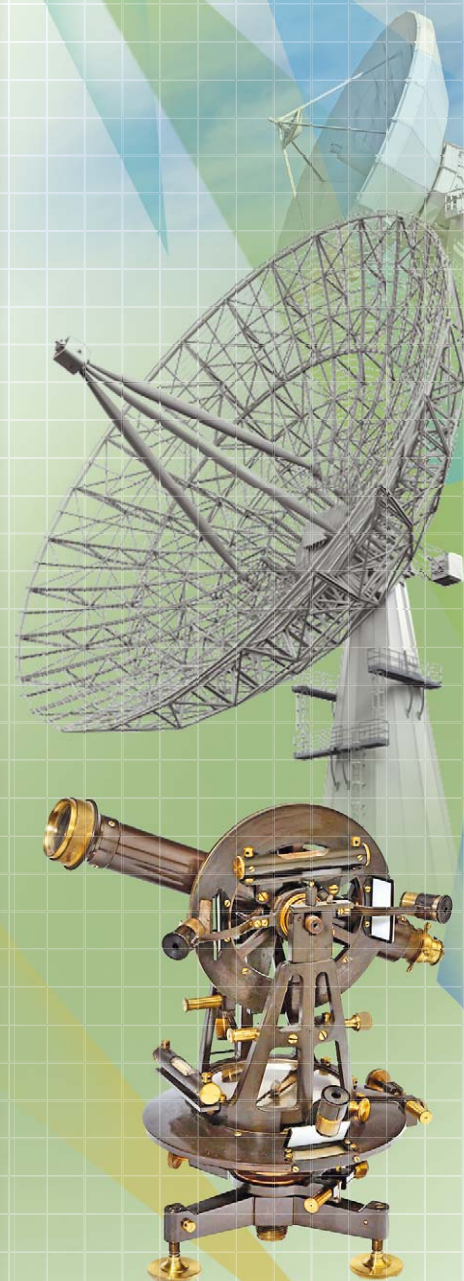
Так как нам известно, что все углы треугольника острые, то $\beta \approx 57^\circ$.

4. Найдём угол γ по теореме о сумме углов треугольника:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - (78^\circ + 57^\circ) = 45^\circ.$$

Ответ: $\alpha \approx 78^\circ$, $\beta \approx 57^\circ$, $\gamma \approx 45^\circ$.

Замечание. При нахождении угла β можно было воспользоваться теоремой косинусов.





Леонард Эйлер (1701–1783) – великий учёный, член Петербургской Академии наук, внёсший огромный вклад в развитие математики, физики. Современники прозвали его волшебником за смелые и изящные методы доказательств. Труды Эйлера с большой пользой для себя изучали и его современники, и «король математики» Карл Гаусс, и следующие поколения учёных.

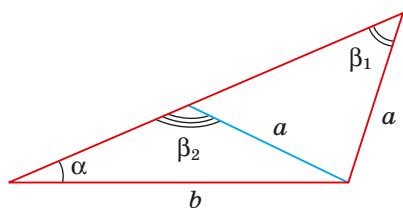


Рис. 1.22

Вообще, для нахождения величины угла предпочтительнее находить его косинус, так как косинус однозначно определяет угол, в отличие от синуса. Но в задаче 3 мы сначала определили вид треугольника, поэтому воспользовались для нахождения угла теоремой синусов, так как при применении теоремы синусов вычисления легче.

Задачи, представленные выше, соответствуют признакам равенства треугольников. Элементы, упоминаемые в признаках равенства треугольников, однозначно определяют треугольник, поэтому данные задачи имеют единственное решение.

Рассмотрим ещё одну задачу.

Задача 4. Решить треугольник по двум сторонам — $a = 8$ см и $b = 12$ см — и противолежащему стороне a углу $\alpha = 30^\circ$.

Решение.

Найдём $\sin \beta$ по теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}; \text{ отсюда } \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} \approx \frac{12 \cdot 0,5}{8} = 0,75.$$

Этому значению синуса соответствуют два угла:

$$\beta_1 \approx 49^\circ \quad \text{и} \quad \beta_2 \approx 180^\circ - 49^\circ = 131^\circ.$$

Поэтому задача имеет два решения (рис. 1.22).

1-е решение. $\beta \approx 49^\circ$.

Найдём угол γ по теореме о сумме углов треугольника:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - 79^\circ \approx 101^\circ.$$

Найдём третью сторону по теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}; \text{ отсюда } c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \approx \frac{8 \cdot 0,982}{0,5} \text{ см} \approx 15,7 \text{ см}.$$

2-е решение. $\beta \approx 131^\circ$.

$$\text{Тогда } \gamma \approx 180^\circ - (131^\circ + 30^\circ) = 19^\circ,$$

$$\text{а сторона } c \approx \frac{8 \cdot 0,326}{0,5} \approx 5,2 \text{ (см)}.$$

Ответ: $c \approx 5,2$ см; $\beta \approx 131^\circ$; $\gamma \approx 19^\circ$ или $c \approx 15,7$ см; $\beta \approx 49^\circ$; $\gamma \approx 101^\circ$.

Замечание. Эту задачу можно решить, используя для нахождения третьей стороны c теорему косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

В этом случае получится квадратное уравнение относительно c . Кстати, в зависимости от значений a , b и α это уравнение может иметь одно решение, два решения или не иметь решений. Таким образом, такая задача может иметь одно решение, два решения или не иметь решений.

О ТРИГОНОМЕТРИИ Как и всякая наука, тригонометрия возникла из потребностей жизни. Необходимость определения местоположения корабля в море или путешественников на суше привело к развитию астрономии, а вместе с ней и тригонометрии.

Ведущую роль в ориентации в пространстве играла высота расположения звезды или планеты относительно линии горизонта в данной местности и в конкретный момент времени. Чтобы научиться находить высоту, надо было научиться решать треугольник, одна вершина которого являлась светилом, а две другие располагались на поверхности земли (рис. 1.23).

Рассмотрим окружность с центром в точке O , радиусом, равным 1, и хордой AB . Пусть $\angle AOB = 2\alpha$ (рис. 1.24), тогда $\angle BOH = \alpha$. Если в единичной окружности измерить половину хорды, стягивающей угол величиной 2° , то получим $\sin 1^\circ$. Если хорда стягивает угол величиной 4° , то длина половины этой хорды будет равна синусу 2° и т. д.

Так появились первые таблицы хорд для различных центральных углов окружности, и составил эти таблицы древнегреческий астроном Гиппарх во II веке до н. э. (сейчас мы пользуемся таблицей синусов-полухорд).

Накопившиеся знания, а также широкое применение тригонометрии в различных областях деятельности привели к отделению тригонометрии от астрономии. В Европе первым трудом, в котором тригонометрия рассматривалась как самостоятельная ветвь математики, был труд «Пять книг о треугольниках всех видов», написанный Региомontanом в 1466 году, где он систематизировал вопросы тригонометрии.

Завершающий этап в развитии тригонометрии связан с именем Леонарда Эйлера, одного из величайших математиков XVIII века. До Эйлера в тригонометрии не использовалась символика, а применялись громоздкие описания. Эйлер ввёл в тригонометрию современную символику, которой мы пользуемся и сейчас: $\sin$, $\cos$, tg , ctg , ввёл обозначения a , b и c для сторон и α , β , γ для углов треугольника ABC , усовершенствовал содержание: доступно изложил вопрос о знаках тригонометрических функций в координатных четвертях, установил формулы приведения.

Но главный вклад Эйлера в тригонометрию состоит в том, что он разработал тригонометрию как науку о тригонометрических функциях, что позволило под аргументом тригонометрической функции понимать не только углы, как было до него, но и любые числа.

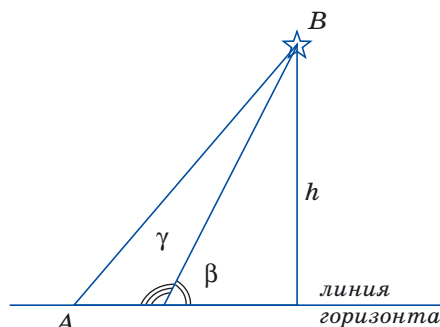


Рис. 1.23

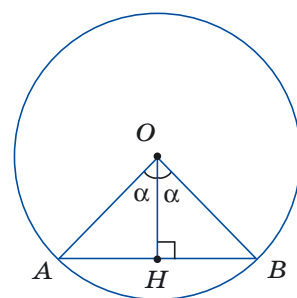


Рис. 1.24

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

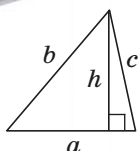
- Что значит решить треугольник?
- По какой теореме можно найти неизвестную сторону треугольника, в котором известны:
 - а) две стороны и угол между ними;
 - б) сторона и два угла;
 - в) две стороны и угол, противолежащий одной из них?
- Как можно найти углы треугольника, у которого заданы три стороны?
- Можно ли найти стороны треугольника, у которого заданы углы?
- Сколько решений может иметь задача на решение треугольника:
 - а) по двум сторонам и углу между ними;
 - б) по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них?

1.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Формулы площади треугольника, четырёхугольника
- Формулы радиуса описанной около треугольника окружности

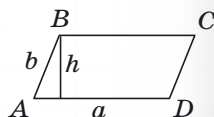
$$S = \frac{1}{2} ah$$



$$S = \frac{1}{2} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_{ABCD} = a \cdot h$$



ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПЛОЩАДЕЙ

Из курса геометрии 8 класса вам уже известны некоторые формулы для вычисления площади треугольника. Применение тригонометрических функций даёт возможность получить ещё несколько полезных формул.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ

ТЕОРЕМА. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

В 8 классе эта теорема была доказана для остроугольного треугольника. Докажем теперь её для любого треугольника.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC : $AB = c$, $AC = b$ и $\angle A = \alpha$. Докажем, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$.

Проведём в треугольнике ABC высоту BH (рис. 1.25, а и рис. 1.25, б).

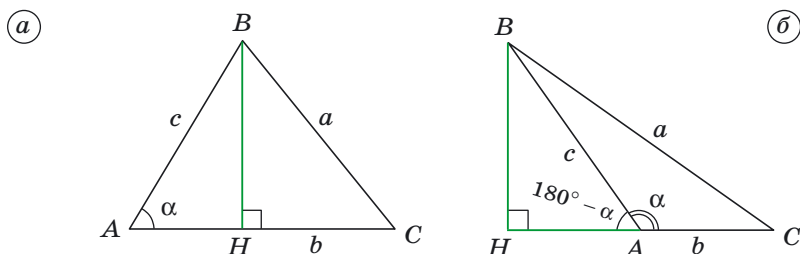


Рис. 1.25

Отрезок BH является катетом в прямоугольном треугольнике ABH , лежащим против угла α , если угол α острый (рис. 1.25, а), или лежащим против смежного с ним угла $(180^\circ - \alpha)$, если угол α тупой (рис. 1.25, б).

Так как $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, то в обоих случаях

$$BH = AB \sin \alpha = c \sin \alpha.$$

$$\text{Имеем: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

Теорема верна и в случае, когда $\alpha = 90^\circ$ (рис. 1.26). Действительно, $S_{ABC} = \frac{1}{2} bc$, а так как $\sin 90^\circ = 1$, то можем записать

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha. \quad \blacktriangledown$$

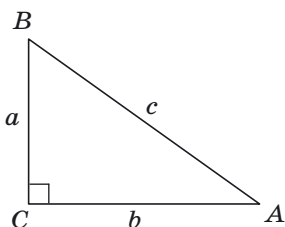


Рис. 1.26

СЛЕДСТВИЕ 1. Площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними.

Доказательство. Пусть в параллелограмме $ABCD$ (рис. 1.27) $AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \alpha$. Докажем, что

$$S_{ABCD} = ab \sin \alpha.$$

Диагональ BD делит параллелограмм на два равных треугольника, отсюда

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \alpha = ab \sin \alpha. \quad \blacktriangledown$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{abc}{4R}$, где a , b , c — стороны треугольника, R — радиус описанной около треугольника окружности.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC : $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Докажем, что $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$.

Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$.

Так как $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, то $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$.

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$. $\blacktriangledown$

Из доказанной формулы следует формула радиуса описанной около треугольника окружности:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

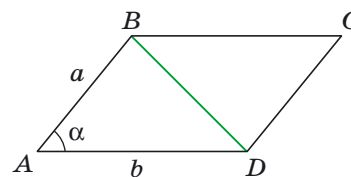


Рис. 1.27

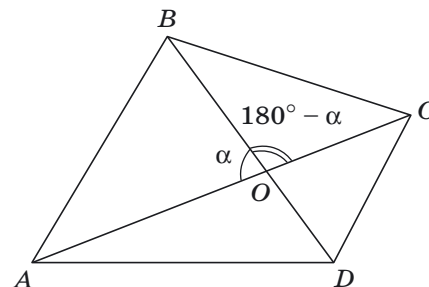


Рис. 1.28

ПЛОЩАДЬ ВЫПУКЛОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

ТЕОРЕМА. Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Доказательство. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ (рис. 1.28) $AC = d_1$, $BD = d_2$, угол между диагоналями равен α . Докажем, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$.

$$\angle AOB = \angle COD = \alpha; \quad \angle BOC = \angle AOD = 180^\circ - \alpha.$$

Учитывая, что диагонали разбили четырёхугольник $ABCD$ на четыре треугольника и что $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, получаем:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} = \\ &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin(180^\circ - \alpha) + \\ &+ \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} OA \cdot OD \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \\ &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \alpha + \\ &+ \frac{1}{2} OA \cdot OD \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot (OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OA \cdot OD) = \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot (OB \cdot (OA + OC) + OD \cdot (OA + OC)) = \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot (OA + OC) (OB + OD) = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AC \cdot BD = \\ &= \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha. \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте и докажите соседу по парте теорему о вычислении площади треугольника по известным двум его сторонам и углу между ними.
- Две стороны треугольника равны 10 см и 15 см. Может ли площадь этого треугольника быть равной 20 см²? 75 см²? 150 см²?
- Как можно вычислить площадь треугольника, если известны его стороны и радиус описанной около треугольника окружности?
- Как можно вычислить площадь параллелограмма, если известны его стороны и один из углов?
- Как можно вычислить площадь четырёхугольника, если известны его диагонали и угол между ними?
- Как найти радиус описанной около треугольника окружности, если известны его стороны?

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

п. 1.1

Т 1

Постройте острый угол, синус которого равен: а) 0,4; б) $\frac{1}{3}$.
С помощью калькулятора найдите величины этих углов.

К 2

Постройте острый угол, косинус которого равен: а) $\frac{2}{3}$; б) 0,3.
С помощью калькулятора найдите величины этих углов.

3

Найдите синусы, косинусы и тангенсы острых углов α и β прямоугольного треугольника (рис. 1), если
а) $a = 5$, $c = 13$; б) $a = 10$, $b = 24$;
в) $a = 6$, $b = 8$; г) $b = 7$, $c = 25$.

К 4

Существует ли угол, для которого:

- а) $\sin \alpha = 0,6$; б) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; в) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$;
г) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}$; д) $\operatorname{tg} \alpha = 100$; е) $\operatorname{ctg} \alpha = 0,007$;
ж) $\sin \alpha = -2$; з) $\cos \alpha = \frac{3}{2}$?

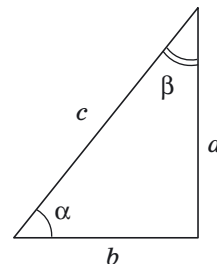


Рис. 1

К 5

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

Выясните, как изменяется синус угла при изменении величины угла от 0° до 180° .

1. Постройте единичную полуокружность, отметьте на ней точку M , проведите радиус OM . Угол, который образует радиус OM с положительной полуосью Ox , обозначьте α . Укажите, длине какого отрезка равно значение синуса угла α .

2. Чему равен $\sin 0^\circ$? $\sin 90^\circ$? $\sin 180^\circ$?

3. Пусть теперь точка M движется по полуокружности от положительной полуоси Ox против часовой стрелки до оси Oy . Как изменяется при этом угол α ? Запишите соответствующее неравенство. Как при этом изменяется $\sin \alpha$? Запишите соответствующее неравенство.

4. Закончите предложение: при возрастании величины острого угла от 0° до 90° его синус...

5. Пусть теперь точка M движется против часовой стрелки от оси Oy к отрицательной полуоси Ox . В каких пределах изменяется при этом угол α ? Запишите соответствующее неравенство. Как при этом изменяется синус угла? Запишите соответствующее неравенство.

6. Сделайте вывод и закончите предложение: при возрастании величины тупого угла от 90° до 180° его синус...

7. Расположите в порядке возрастания числа:

- а) $\sin 20^\circ$; $\sin 70^\circ$; $\sin 10^\circ$; $\sin 90^\circ$; $\sin 45^\circ$; $\sin 60^\circ$;
б) $\sin 120^\circ$; $\sin 170^\circ$; $\sin 110^\circ$; $\sin 90^\circ$; $\sin 135^\circ$; $\sin 150^\circ$.
8. Известно, что $\sin \alpha = \sin \beta$. Можно ли утверждать, что $\alpha = \beta$?

К 6

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

Выясните, как изменяется значение косинуса угла при изменении величины угла от 0° до 180° .

1. Выполните построение п. 1 задачи № 5 и укажите отрезок, длине которого равно значение косинуса угла α .

2. Укажите значение $\cos 0^\circ$; $\cos 90^\circ$; $\cos 180^\circ$.

3. Пусть точка M начинает движение от положительной полуоси Ox и движется по полуокружности против часовой стрелки до отрицательной полуоси Ox . Как при этом изменяется значение угла α ? Запишите соответствующее неравенство. Как при этом изменяется $\cos \alpha$? Запишите соответствующее неравенство.

4. Сделайте вывод и закончите предложение: при возрастании величины угла от 0° до 180° его косинус...

5. При каких значениях угла α $\cos \alpha > 0$?

6. При каких значениях угла α $\cos \alpha < 0$?

7. Запишите в порядке возрастания:

$\cos 30^\circ$; $\cos 150^\circ$; $\cos 10^\circ$; $\cos 100^\circ$; $\cos 90^\circ$; $\cos 71^\circ$.

8. Можно ли утверждать, что косинус однозначно определяет угол, то есть из равенства $\cos \alpha = \cos \beta$ следует, что $\alpha = \beta$?

К 7 Определите, острым, прямым или тупым является угол α , если:

а) $\cos \alpha = 0,7$; б) $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; в) $\cos \alpha = 0$; г) $\cos \alpha = 0,99$.

К 8 Сравните с нулём значение выражения:

а) $\sin 130^\circ$; б) $\cos 70^\circ$; в) $\cos 110^\circ$;
 г) $\operatorname{tg} 100^\circ$; д) $\sin 0^\circ$; е) $\cos 90^\circ$;
 ж) $\sin 100^\circ \cdot \cos 80^\circ$; з) $\cos 100^\circ \cdot \sin 130^\circ$;
 и) $\sin 70^\circ \cdot \cos 100^\circ \cdot \operatorname{tg} 130^\circ$; к) $\operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \sin 11^\circ \cdot \cos 111^\circ$.

К 9 Докажите, что косинус внешнего угла треугольника равен косинусу суммы двух внутренних углов треугольника, не смежных с этим углом.

10 В остроугольном треугольнике ABC высота BH , равная 6 см, образует со сторонами AB и BC соответственно углы 60° и 45° . Найдите стороны треугольника ABC и его площадь.

К Т 11 Точка M движется по единичной полуокружности против часовой стрелки. Величина угла, образованного радиусом OM с положительной полуосью Ox , обозначена α .

а) Назовите координаты точки M , если $\alpha = 90^\circ$; $\alpha = 30^\circ$; $\alpha = 150^\circ$.

б) Определите α , если $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $M(0; 1)$; $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

К Т 12 а) 1) На единичной полуокружности отметьте точку M , соответствующую углу 30° , и определите координаты точки M .

2) Отметьте на единичной полуокружности точку M_1 , симметричную точке M относительно оси Oy , и укажите её координаты. Что можно сказать про сумму углов, образованных радиусами OM и OM_1 с положительной полуосью Ox ?

б) 1) На единичной полуокружности отметьте точку M , соответствующую углу 45° , и определите координаты точки M .

2) Отметьте на единичной полуокружности точку M_1 , соответствующую углу $(180^\circ - 45^\circ)$, и определите координаты точки M_1 .

3) Сравните координаты точек M и M_1 .

К Т 13 Какой вывод можно сделать об углах α и β , если известно, что:

а) $\cos \alpha = \cos \beta$; б) $\cos \alpha = -\cos \beta$; в) $\cos \alpha = \sin \beta$; г) $\sin \alpha = \sin \beta$?

14 Чему равен: а) $\cos(180^\circ - \alpha)$, если $\cos \alpha = 0,3$; б) $\sin(180^\circ - \alpha)$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; в) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$; г) $\cos(180^\circ - \alpha)$, если $\alpha = -\frac{3}{4}$;

д) $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -0,1$?

К 15 Могут ли синус и косинус одного и того же угла равняться соответственно: а) 0,3 и 0,7; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$; в) 0,5 и -0,5; г) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $-\frac{\sqrt{7}}{3}$?

16 Найдите: а) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = 0,6$ и $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$; б) $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$; в) $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$, $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

17 Упростите выражение: а) $1 - \sin^2 \alpha$; б) $1 - \cos^2 \alpha$; в) $2\cos^2 \alpha - 1$.

18 Найдите значение выражения:

а) $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ$; б) $\cos 60^\circ + \sin 150^\circ$; в) $2\sin 90^\circ + 3\cos 0^\circ$;
г) $\operatorname{tg} 180^\circ - 2\sin 0^\circ$; д) $\sin^2 132^\circ + \cos^2 132^\circ$; е) $2\cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 90^\circ$.

19 а) Чему равен синус угла, если его косинус равен: 0° ? 1° -1° ?

б) Чему равен косинус угла, если его синус равен: 0° ? 1° ?

20 а) Чему равен тангенс угла, если его котангенс равен: 1° -5° $0,2^\circ$ $\sqrt{3}^\circ$?

б) Чему равен котангенс угла, если его тангенс равен: $0,5^\circ$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}^\circ$ -1° 100° ?

21 С соседом по парте или командой обсудите утверждения и укажите верные из них.

1. Если косинусы углов равны, то равны и сами углы.
2. Если синусы углов равны, то равны и сами углы.
3. Существует угол, синус и косинус которого равны.
4. Косинус угла треугольника может быть отрицательным числом.
5. Синус угла треугольника может быть отрицательным числом.
6. Косинус прямого угла равен 0.
7. Синус угла треугольника может быть равен 1.
8. Косинус угла треугольника может быть равен 1.
9. Синусы смежных углов равны.
10. Косинус любого острого угла больше косинуса любого тупого угла.
11. Синус любого острого угла больше синуса любого тупого угла.
12. Существует угол, синус и косинус которого равны 1.

22 Найдите значение выражения:

а) $\sin 30^\circ + \cos 150^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ - 2\sin 45^\circ$;
б) $2\cos 135^\circ + \sin 150^\circ - \sqrt{3}\operatorname{tg} 60^\circ - \cos 45^\circ$.

Т 23

Не используя калькулятор или таблицы, найдите значение выражения:

а) $\frac{\cos 40^\circ}{\cos 140^\circ}$; б) $\frac{\sin 110^\circ}{\sin 70^\circ}$; в) $\frac{\cos 25^\circ}{\cos 155^\circ}$; г) $\frac{\operatorname{tg} 100^\circ}{\operatorname{tg} 80^\circ}$; д) $\frac{\operatorname{ctg} 11^\circ}{\operatorname{ctg} 169^\circ}$.

К 24

а) Что можно сказать о косинусах углов: параллелограмма? трапеции?
б) Что можно сказать о синусах углов: параллелограмма? трапеции?

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Смежные углы равны.
- 2) Сумма углов прямоугольного треугольника равна 90° .
- 3) Вертикальные углы равны.
- 4) Сумма смежных углов равна 180° .
- 5) Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° .
- 6) Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.

2. а) Один из острых углов прямоугольного треугольника на 75° больше другого. Найдите острые углы треугольника.
б) Один из острых углов прямоугольного треугольника на 24° меньше другого. Найдите эти углы.
3. а) В треугольнике ABC : $AB = BC$, $\angle C = 62^\circ$. Найдите внешний угол треугольника при вершине B .
б) В треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен 34° . Найдите внешний угол треугольника при вершине B .
4. а) Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна 150° . Найдите третий угол треугольника.
б) Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна 50° . Найдите этот внешний угол.
5. а) Один из смежных углов на 30° больше другого. Найдите эти углы.
б) Градусные меры смежных углов относятся как $3 : 2$. Найдите эти углы.
6. Стороны треугольника равны 4, 6 и 9. Может ли угол, лежащий против стороны, равной 6 см, быть: 1) тупым? 2) прямым? 3) острым?
7. С соседом по парте или с группой одноклассников выясните как найти неизвестные стороны равнобедренного треугольника, если известны: а) боковая сторона и угол при вершине, противоположной основанию; б) основание и угол при вершине, противоположной основанию; в) высота, проведённая к основанию, и угол при вершине, противоположной основанию; г) высота, проведённая к основанию, и угол при основании.
8. Найдите неизвестные стороны, углы и площадь равнобедренного треугольника, у которого один из углов равен 120° , если: а) его боковая сторона равна 4; б) его основание равно 10; в) высота, проведённая к его основанию, равна 8.

П. 1.2

- К 25** Определите вид треугольника, если его стороны равны: а) 3, 5 и 7; б) 10, 11 и 18; в) 8, 15 и 17; г) 17, 19 и 20.
- 26** а) Докажите, что равнобедренный треугольник с боковой стороной 5 и основанием 7 является остроугольным.
б) Докажите, что равнобедренный треугольник с боковой стороной 5 и основанием 8 является тупоугольным.
- Т 27** Докажите, что: а) треугольник со сторонами 7, 24 и 25 является прямоугольным; б) треугольник со сторонами 7, 9 и 14 является тупоугольным.
- 28** Найдите неизвестную сторону треугольника, если две его стороны — a и b — и угол между ними γ соответственно равны: а) $a = 8$; $b = 5\sqrt{3}$; $\gamma = 150^\circ$; б) $a = 5$; $b = 2\sqrt{3}$; $\gamma = 30^\circ$; в) $a = b = 4\sqrt{2}$; $\gamma = 45^\circ$; г) $a = 3$; $b = 4$; $\gamma = 60^\circ$.
- 29** а) Известно, что косинусы всех углов треугольника положительны. Что можно сказать об этом треугольнике?
б) Известно, что косинусы всех углов четырёхугольника равны 0. Что можно сказать про этот четырёхугольник?
- К 30** Стороны треугольника равны 6, 10 и 14. Найдите: а) больший угол треугольника; б) меньший угол треугольника.
- К 31** Где расположен центр описанной около треугольника окружности (внутри треугольника, вне треугольника или на стороне треугольника), если его стороны равны: а) 4, 5, 6; б) 6, 8, 10; в) 4, 5, 8?

К Т 32

Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит бо́льшая диагональ.

33

а) Стороны параллелограмма равны $4\sqrt{2}$ и 10, один из его углов — 135° . Найдите диагонали параллелограмма.

б) Диагонали параллелограмма, равные $4\sqrt{2}$ и 10, пересекаются под углом в 45° . Найдите стороны параллелограмма.

Т 34

а) Стороны параллелограмма — a и b , один из его углов — α . Найдите диагонали параллелограмма.

б) Диагонали параллелограмма — c и d , угол между ними — γ . Найдите стороны параллелограмма.

35

а) Диагонали параллелограмма равны 11 и 17, одна из сторон — 13. Найдите периметр параллелограмма.

б) Стороны параллелограмма равны 14 и 18, длины диагоналей относятся как 4 : 7. Найдите диагонали параллелограмма.

36

а) Стороны параллелограмма равны 7 и 11, одна из диагоналей — 12. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

б) Диагонали параллелограмма равны 4 см и 7 см, а одна из сторон на 1 см меньше другой. Найдите стороны параллелограмма.

37

а) С соседом по парте обсудите, как вычислить диагонали ромба, если известны его сторона a и угол α .

б) Найдите диагонали ромба, периметр которого равен 24, а один из углов — 150° .

в) Найдите периметр ромба, если один из углов ромба равен 60° , а бо́льшая диагональ равна 16.

38

а) С соседом по парте составьте план, как вычислить диагональ равнобедренной трапеции, если известны её основание a , боковая сторона b и угол между ними α .

б) Найдите диагональ трапеции и её периметр, если меньшее основание равно боковой стороне и равно 10, а угол при основании равен 60° .

К 39

Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите: а) высоты треугольника; б) медианы треугольника; в) биссектрисы треугольника.

К 40

а) Стороны треугольника равны a , b и c . Угол, противолежащий стороне a , равен 120° . Докажите, что выполняется равенство $a^2 = b^2 + bc + c^2$.

б) Докажите, что если в треугольнике выполняется равенство $(b + c + a) \times (b + c - a) = 3bc$, то угол, лежащий против стороны a , равен 60° .

К 41

В окружности проведены хорды AB и CD , пересекающиеся в точке M . Известно, что $AM = 4$ см, $MD = 9$ см, $CD = 15$ см, расстояние между точками A и C равно $\sqrt{26}$. Найдите угол между прямыми AB и CD .

К 42

Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 8 см и 24 см. Чему равна биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника?

К 43

В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Докажите, что

$$d_a = \frac{\sqrt{2bc(b+c)^2 - a^2}}{b+c}, \text{ где } BC = a, AC = b, AB = c.$$

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

- По данным рисунка 2 выразите длину хорды BC через α и R .
- По данным рисунка 3 найдите величину угла ABC .
- По данным рисунка 4 найдите величину угла ADC .

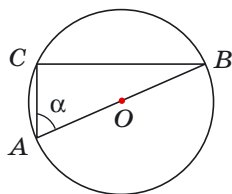


Рис. 2

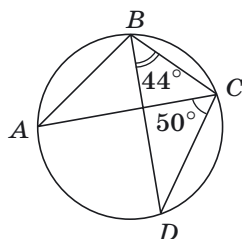


Рис. 3

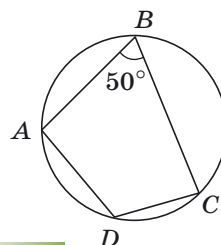


Рис. 4

4. Центральный угол на 22° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите эти углы.
5. а) Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, составляющую $\frac{1}{4}$ окружности.
- б) Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет 20% всей окружности.
6. Найдите значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острых углов египетского треугольника.
7. Вершины A , B и C треугольника, вписанного в окружность, делят её на 3 дуги, градусные меры которых относятся как $2:5:11$. Чему равен больший угол треугольника ABC ?
8. В угол A , равный 76° , вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C . Найдите угол BOC (рис. 5).
9. AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 44° . Найдите угол AOD .
10. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что $\angle CA_1B_1 = \angle A$.

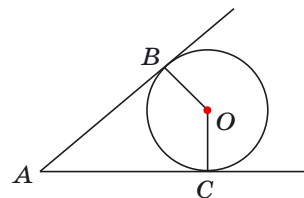


Рис. 5

П. 1.3

- 44 Назовите наибольшую и наименьшую стороны остроугольного треугольника ABC , если $\sin C > \sin A > \sin B$.
- 45 В треугольнике ABC $\sin A = \sin B$. Может ли один из углов A или B быть тупым?
- 46 В треугольнике ABC : $AB = 3$ см, $AC = 2$ см. Может ли $\sin B$ быть равным $0,75$?
- 47 Вычислите отношения сторон $a:b$ и $c:a$ в треугольнике ABC (рис. 6), в котором: а) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 120^\circ$; б) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$.
- 48 В треугольнике ABC найдите: а) сторону AB , если $BC = 2\sqrt{2}$, $\angle A = 100^\circ$, $\angle C = 30^\circ$; б) угол A , если $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 4$, $\angle C = 45^\circ$.

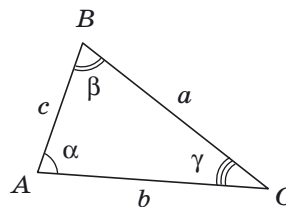


Рис. 6

- Т 49 а) В треугольнике ABC сторона AB вдвое меньше стороны BC , $\sin C = 0,25$. Найдите угол A . Сколько решений имеет задача? б) В треугольнике ABC : $\sin B : \sin C = 1:4$. Найдите сторону AB , если $AC = 6$ м.
- 50 В треугольнике ABC : $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, CD — биссектриса, $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите AD .
- б) В треугольнике ABC : $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$, AD — биссектриса. Найдите BD и AB .

Т 51

а) Используя данные рисунка 7, найдите: AC , BM , S_{ABC} .б) Используя данные рисунка 8, найдите: AC , CM , S_{ABC} .

52

а) В треугольнике ABC : $AB = 8$, $\sin C = 0,4$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .б) Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 3 см, $\sin B = 0,3$. Чему равна сторона AC ?

53

а) В равнобедренном треугольнике ABC один из углов равен 150° , радиус окружности, описанной около треугольника, равен 5. Чему равны высота, проведённая к основанию треугольника, и его площадь?

б) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, основание — 12 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

54

а) С помощью теоремы синусов найдите отношение основания равнобедренного прямоугольного треугольника к боковой стороне.

б) С помощью теоремы синусов докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

55

а) С помощью теоремы синусов докажите, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

б) С помощью теоремы синусов докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, длины которых обратно пропорциональны синусам прилежащих к этой стороне углов.

в) С помощью теоремы синусов докажите, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

К 56

а) Углы треугольника, прилежащие к стороне c , равны α и β . Найдите длины биссектрис треугольника, выходящих из вершин этих углов.б) Диагональ параллелограмма образует с его сторонами углы α и β . Найдите эту диагональ, если сторона параллелограмма, прилежащая к углу α , равна a .

57

а) Около равнобедренного треугольника с углом 120° описана окружность радиуса $4\sqrt{3}$. Найдите стороны треугольника.б) Радиус окружности, описанной около треугольника, равен 6 см. Найдите углы треугольника, если две его стороны равны 6 см и $6\sqrt{3}$ см. Сколько решений имеет задача?

58

Докажите, что высота BH треугольника ABC равна: $\frac{AB \cdot BC}{2R}$, где $2R$ — радиус окружности, описанной около треугольника.

К Т 59

Основания равнобедренной трапеции равны 18 и 42, высота — 16. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

Т 60

а) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, основание — 8. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

б) Две стороны треугольника равны 6 см и 5 см, а высота, проведённая к третьей стороне, — 4 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Т 61

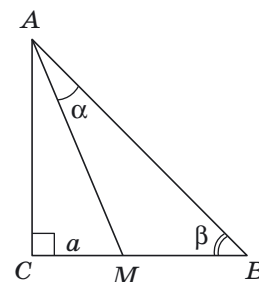
На основании AC равнобедренного треугольника ABC отметили точку M . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABM и BCM , равны.

Рис. 7

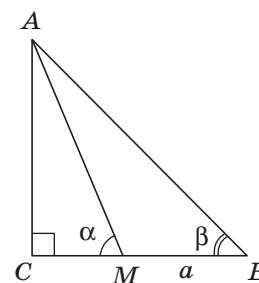


Рис. 8

К 62

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1. В равностороннем треугольнике ABC угол A разделили лучами на 3 равных угла. Какой из отрезков, образовавшихся при пересечении этими лучами стороны BC , наибольший?

2. Сторону BC равностороннего треугольника ABC разделили на три равных отрезка: BD , DE , EC . Какой из углов: BAD , DAE , EAC — наибольший?

3. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник.
а) Его прямой угол разделили лучами на три равных угла. Какой из отрезков гипотенузы, образованных этими лучами, оказался наибольшим? б) Гипотенузу разделили на три равных отрезка. Какой из них виден из вершины прямого угла под наибольшим углом?

63

а) 1) С соседом по парте по рисунку 9 составьте план, как найти высоту недоступного предмета.

2) Вычислите высоту дерева (рис. 9), если $BC = 50$ м, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

б) Рассмотрите рисунок 10 и составьте план, как найти расстояние от точки A до недоступной точки B .

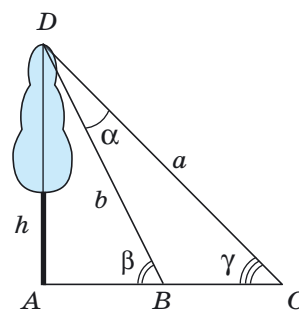


Рис. 9

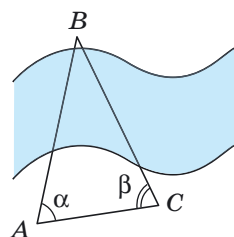


Рис. 10

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. По данным рисунка 11 найдите неизвестные стороны и углы треугольника.

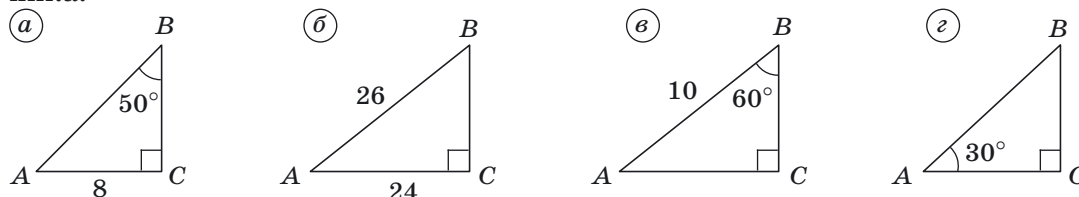


Рис. 11

2. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 12) $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $CB = \sqrt{3}$. Найдите высоту CH .

3. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 13) найдите BC , если CH — высота, $\angle A = \alpha$, $HB = 1$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна $\sqrt{2}$. Внешний угол при вершине A равен 120° . Найдите площадь треугольника.

5. а) По данным рисунка 14 найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$ и отрезок AH .

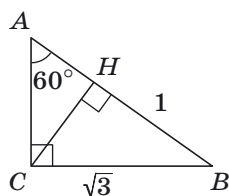


Рис. 12

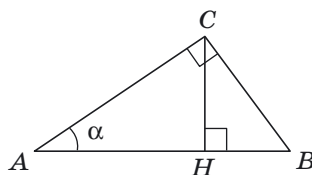


Рис. 13

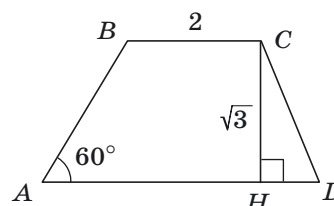


Рис. 14

б) По данным рисунка 15 найдите стороны AB и BC трапеции $ABCD$.

6. а) Основания трапеции равны 9 см и 12 см, боковая сторона, равная 6 см, образует с одним из оснований угол в 150° . Найдите площадь трапеции.

б) Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 15, её площадь равна 55. Найдите боковую сторону трапеции.

7. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ равна 12 см и образует со сторонами AD и CD углы 45° и 60° . Найдите длины высот параллелограмма.

8. Мачта сотовой связи крепится оттяжками-тросами к земле (рис. 16) на расстоянии 25 м от основания мачты. Угол наклона троса к земле равен 58° .

а) На каком расстоянии от земли трос прикреплен к мачте?

б) Какова высота мачты, если в месте крепления троса к земле конец мачты виден под углом 71° к горизонту?

9. Максимальная длина лестницы на пожарной машине равна 30 м, максимальный угол её наклона составляет 70° . Достигнет ли пожарная лестница девятого этажа дома при максимальном отклонении, если её основание находится на пожарной машине на высоте 2 м от земли, а высота каждого этажа 3 м?

10. Самолёт приближается к аэропорту на высоте 9000 м от уровня посадочной полосы. Пилоту дано предписание производить снижение для посадки под постоянным углом в 6° . На каком расстоянии (с точностью до 1 км) от посадочной полосы пилот должен начать снижение?

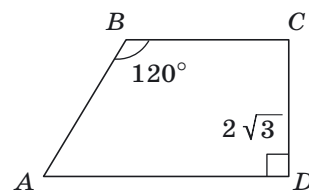


Рис. 15

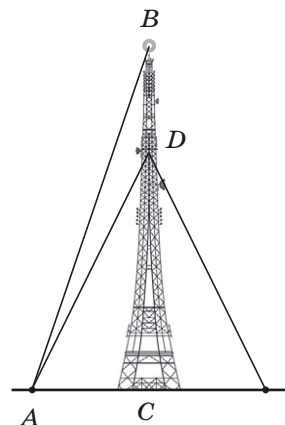


Рис. 16

П. 1.4

Т 64

Решите треугольник (рис. 17), если:

- а) $a = 6$, $b = 4$, $\gamma = 60^\circ$; б) $b = 9$, $c = 15$, $\alpha = 100^\circ$;
в) $a = 5$, $b = 21$, $\gamma = 130^\circ$; г) $a = 12$, $c = 9$, $\beta = 15^\circ$.

Т 65

Решите треугольник (рис. 17), если:

- а) $a = 6$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$; б) $b = 8$, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 25^\circ$;
в) $a = 10$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 70^\circ$; г) $c = 20$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 40^\circ$.

Т 66

Решите треугольник (рис. 17), если:

- а) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$; б) $a = 23$, $b = 17$, $c = 39$;
в) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$; г) $a = 7$, $b = 2$, $c = 8$.

Т 67

Решите треугольник (рис. 17), если:

- а) $a = 17$, $b = 6$, $\alpha = 160^\circ$; б) $a = 3$, $b = 4$, $\alpha = 30^\circ$;
в) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 60^\circ$; г) $a = 10$, $b = 6$, $\alpha = 120^\circ$.

68

а) Решите равнобедренный треугольник по основанию, равному 8, и углу при основании, равному 20° .

б) В треугольнике ABC : $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 4$ см, BD — биссектриса. Решите треугольник ABD .

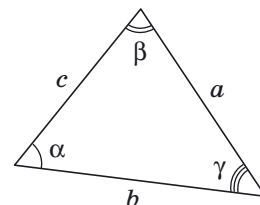


Рис. 17

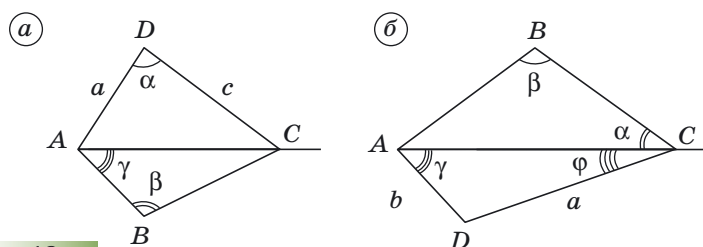


Рис. 18

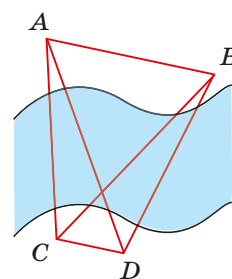


Рис. 19

Т 69

По данным рисунка 18 (а—б) найдите AB .

70

а) Большее основание равнобедренной трапеции равно 12, а меньшее основание равно боковой стороне, один из её углов равен 105° . Найдите периметр трапеции. Ответ округлите до десятых.

б) Боковые стороны трапеции равны большему основанию и равны 20 см, диагональ образует с основанием трапеции угол в 50° . Чему равна средняя линия трапеции?

71

Основания трапеции равны 12 и 16, а боковые стороны — 7 и 9. Найдите углы трапеции.

Т 72

С соседом по парте составьте план, как найти расстояние между двумя недоступными точками (рис. 19).

73

Почтальон каждый день проезжает на велосипеде по маршруту: почта, посёлок Радужный, село Светлое, почта (рис. 20), составляющему треугольник, два угла которого равны 100° и 30° . Известно, что меньший отрезок почтальон преодолевает за 0,5 ч. Сколько времени уйдёт на весь маршрут без остановок, если считать скорость движения почтальона постоянной?

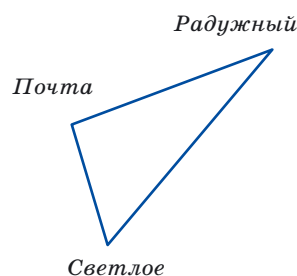


Рис. 20

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (рис. 21) изображены геометрические фигуры. Найдите площадь каждой фигуры.

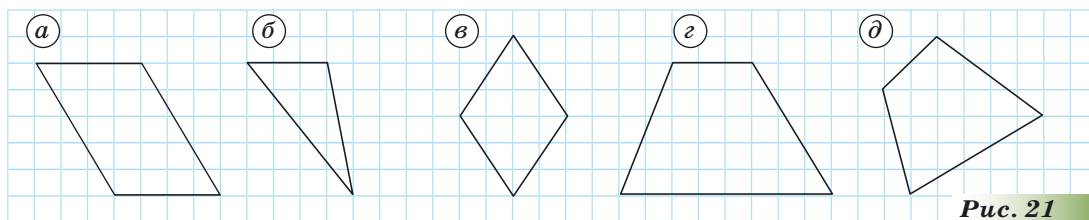


Рис. 21

2. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 40.

3. Площадь прямоугольного треугольника равна 20, один из его катетов — 5. Найдите другой катет.

4. Один из углов равнобедренного треугольника равен 120° , боковая сторона — 10. Найдите площадь треугольника.

5. Сторона равностороннего треугольника равна 8. Чему равна площадь этого треугольника?

6. Сторона параллелограмма равна 10, высота параллелограмма образует с этой стороной угол в 60° . Найдите площадь параллелограмма, если другая сторона равна 18.

7. Основания трапеции равны 18 и 7, высота — 2. Найдите площадь трапеции.
8. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 10 и 6, большая боковая сторона образует с основанием угол в 45° .

П. 1.5

К 74

а) Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 10 и 7, а угол между ними равен 30° .

б) Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 12 и 8, а угол между ними равен 60° .

75

Вычислите площадь треугольника со сторонами 3 и 4, угол между которыми равен: а) 30° ; б) 135° ; в) 150° ; г) 100° .

К 76

а) Две стороны треугольника равны 15 и $7\sqrt{2}$, а угол между ними равен 45° . Найдите площадь треугольника и высоту, проведённую к большей из данных сторон.

б) Две стороны треугольника равны 10 и 20, а угол между ними равен 120° . Найдите площадь треугольника и высоту, проведённую к меньшей из данных сторон.

77

а) Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Боковая сторона треугольника равна 6. Найдите площадь этого треугольника.

б) Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30° . Боковая сторона треугольника равна 12. Найдите площадь этого треугольника.

К 78

а) Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 15 и 16, а угол между ними равен 30° .

б) Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 22 и 5, а угол между ними равен 60° .

К 79

а) Найдите площадь ромба, если его стороны равны 10, а один из углов равен 150° .

б) Найдите площадь ромба, если его стороны равны 22, а один из углов равен 120° .

80

а) Диагонали выпуклого четырёхугольника равны $5\sqrt{3}$ и 8, а угол между ними равен 60° . Найдите площадь четырёхугольника.

б) Диагонали выпуклого четырёхугольника равны 10 и 15, а угол между ними равен 30° . Найдите площадь четырёхугольника.

81

а) Найдите площадь треугольника ABC , если: 1) $\angle A = \alpha$, а высоты, проведённые из вершин B и C , равны соответственно h_b и h_c .

2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а высота, проведённая из вершины A , равна h_a .

К 82

а) Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC . Площадь треугольника ABC равна 16 см^2 , а треугольника BCD — 10 см^2 . Найдите отношение $AB : BC$.

б) Найдите отношение площадей треугольников, на которые биссектриса BD разбивает треугольник ABC , если $AB = 4$, $BC = 1$.

К 83

В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Используя принятые обозначения (например, рисунок 6), докажите, что $AD = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos \frac{A}{2}$.

К 84

Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC , $AB = 6 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите биссектрису BD .

85

Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами: а) 6, 25 и 29; б) 10, 10 и 12.

86

а) Основания трапеции равны 8 см и 10 см, диагонали — 14 см и 16 см. Найдите площадь трапеции.

б) Основания трапеции равны 2 и 6, а боковые стороны — 13 и 15. Найдите площадь трапеции.

87

а) Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 15, её периметр равен 34. Найдите площадь трапеции.

б) Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её основания равны 8 и 32, а периметр равен 80.

К 88

а) В треугольнике ABC угол C — острый, AA_1 и BB_1 — высоты треугольника. Докажите, что треугольники ABC и A_1B_1C подобны, причём коэффициент подобия равен $\cos C$.

б) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC равно $2 \cos A \cos B \cos C$.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. Найдите площадь треугольника со сторонами: а) 13, 14 и 15; б) 9, 10 и 17; в) 8, 15 и 17.

2. Периметр треугольника равен 96, а радиус вписанной окружности — 16. Найдите площадь треугольника.

3. а) Радиус окружности равен 13 см, хорда окружности равна 10 см. Чему равно расстояние от центра окружности до хорды?

б) Хорда, равная 16 см, удалена от центра окружности на 6 см. Найдите диаметр окружности.

4. Из точки A к окружности с центром O проведены две касательные AM и AN , где M и N — точки касания. Угол AOM равен 30° . Найдите площадь треугольника AMN , если $NA = 10$.

5. Через концы диаметра AB окружности радиуса 3 проведены касательная и секущая, пересекающиеся в точке M . Секущая MB пересекает окружность ещё и в точке C . Найдите AC и S_{ABC} , если $MA = 8$ см.



1

Точка M лежит на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC . Докажите, что один из отрезков — MA , MB и MC — равен сумме двух других.

2

Найдите периметр треугольника, один из углов которого равен α , а радиусы вписанной и описанной окружностей равны соответственно r и R .

К 3

Точка B расположена на отрезке AC . Через точку B проходит некоторая прямая. Пусть точка M — произвольная точка на этой прямой. Докажите, что расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM , не зависит от положения этой точки. Найдите это расстояние, если $AC = a$, $\angle MBC = \alpha$.

К 4

На окружности, описанной около треугольника ABC , отмечена точка M . Прямая MA пересекается с прямой BC в точке L , а прямая CM — с прямой AB в точке K . Известно, что $AL = a$, $BK = b$, $CK = c$. Найдите BL .

5

Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$, в котором $AB = CD = a$, $\angle BAD = \angle BCD = \alpha < 90^\circ$, $BC \neq AD$.

К 6

Постройте точку, принадлежащую большому основанию равнобедренной трапеции и отстоящую от данной боковой стороны в n раз дальше, чем от другой ($n = 2, 3, 4$).

К 7 Постройте треугольник ABC , если даны углы A , C и отрезок, равный сумме стороны AC и высоты BH .

К 8 (Теорема Стюарта.) Докажите, что если точка M принадлежит стороне BC треугольника ABC , то выполняется равенство

$$AD^2 = AC^2 \cdot \frac{BD}{BC} + AB^2 \cdot \frac{CD}{BC} - BD \cdot CD.$$

К 9 Докажите, что в любом треугольнике ABC выполняются равенства:

- $2 \cos A \cos B \cos C = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$;
- $2 \sin A \sin B \cos C = 1 + \cos^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B$.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Объясните, как определяют синус и косинус угла α , где $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- Что такое тангенс и котангенс угла?
- Какие задачи на решение треугольников можно решить с помощью тангенса (котангенса)?
- Как связаны между собой $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$?
- Как связаны между собой синус и косинус угла α с синусом и косинусом угла $180^\circ - \alpha$?
- В каких пределах находится значение синуса угла α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$?
- В каких пределах находится значение косинуса угла α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$?
- Известно, что $\cos \alpha < 0$. Какие значения может принимать α ?
- Чему равен $\sin 0^\circ$; $\cos 0^\circ$; $\sin 90^\circ$; $\cos 90^\circ$; $\sin 180^\circ$; $\cos 180^\circ$?
- Сформулируйте и докажите теорему косинусов.
- Какие задачи по решению треугольников вы можете решить с помощью теоремы косинусов?
- Какие практические задачи можно решить с помощью теоремы косинусов?
- Почему теорему косинусов называют обобщённой теоремой Пифагора?
- Как определить вид треугольника с помощью теоремы косинусов?
- Сформулируйте и докажите теорему синусов.
- Какие следствия можно получить из теоремы синусов?
- Пусть известны две стороны треугольника и угол между ними. Как найти биссектрису этого угла?
- Какие вы знаете формулы площади треугольника?
- Какие задачи по решению треугольников вы можете решить с помощью теоремы синусов?
- Какие практические задачи можно решить с помощью теоремы синусов?
- Что значит решить треугольник?
- Что вы знаете из истории тригонометрии?

ГЛАВА 2

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

- МНОГОУГОЛЬНИКИ
- ПРАВИЛЬНЫЕ
МНОГОУГОЛЬНИКИ
- ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ
- ПЛОЩАДЬ КРУГА

ИНТЕРЕСНО

Число π считается самым знаменитым в мире числом — и не без причины. Значение π можно указать только с определённой точностью. Очевидно, число π открывали разные математики независимо друг от друга. У вавилонян π равнялось 3,125, что достаточно точно. Из египетского папируса Ахмеса известно, что египтяне получили ещё более точное значение числа π — 3,1605. Древнегреческие математики V в. до н.э. Антифон и Бризон вычисляли значение π , вписывая в круг и описывая вокруг него правильные многоугольники: увеличивая число сторон многоугольников, математики достигали максимально возможного приближения к площади круга. В III в. до н.э. Архимед подсчитывал длину окружности через длину периметра многоугольников, удваивая число сторон. Он остановился на 96-угольниках, вписанных в круг и описанных вокруг него. Полученное Архимедом значение π находилось между 3,140845 и 3,142857. В III в. китайский математик Лю Хуэй вычислил значение π , равное 3,141592104, на основе многоугольника с 3072 сторонами. 250 лет спустя в Индии математик Арьябхата получил значение в 3,1416, рассматривая 384-сторонний многоугольник.

Использование компьютеров позволяет рассчитать значение числа π с невероятной точностью. В 2011 г. Сигэру Кондо и Александр Йи за 191 день непрерывной работы специально созданного компьютера подсчитали значение π с точностью до десяти триллионов знаков после запятой. Для того чтобы хотя бы приблизительно представить это, стоит учесть, что точности π до 39-го знака после запятой достаточно, чтобы вычислить диаметр всей известной человечеству Вселенной настолько точно, что уровень погрешности составит значение меньше, чем радиус атома водорода.



2.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называется многоугольником
- Чему равна сумма углов n -угольника
- Какие многоугольники называют вписанными в окружность, а какие — описанными около неё

МНОГОУГОЛЬНИКИ

Вы, конечно же, знакомы с многоугольниками. Простейшие из них — треугольники и четырёхугольники — уже основательно изучены.

Треугольник мы определяли как геометрическую фигуру, состоящую из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и соединяющих эти точки отрезков. А как дать определение любому многоугольнику?

ЛОМАНАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Геометрическая фигура, состоящая из таких отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, что никакие два смежных отрезка не лежат на одной прямой, называется **ломаной**.

Два смежных отрезка имеют общий конец. Точки A_1 и A_n могут совпадать (рис. 2.1), в этом случае ломаную называют **замкнутой ломаной**.

Если точки A_1 и A_n не совпадают, то ломаную называют **незамкнутой** (рис. 2.2).

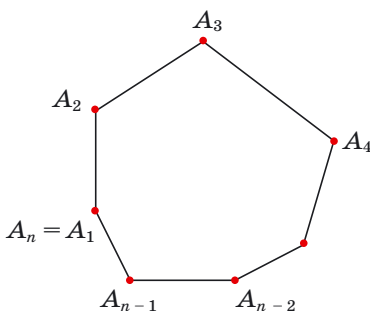


Рис. 2.1

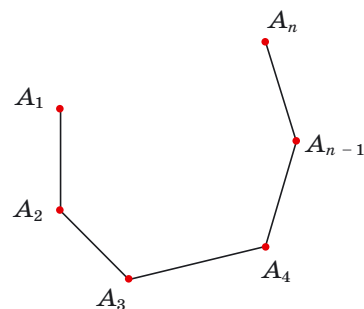


Рис. 2.2

Если несмежные отрезки ломаной не имеют общих точек, то ломаную называют **простой**. На рисунках 2.1–2.3 изображены простые ломаные, а ломаные на рисунке 2.4 не являются простыми.

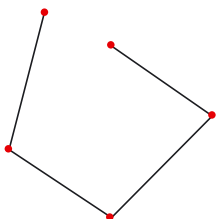


Рис. 2.3

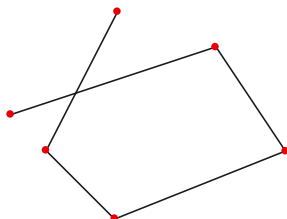
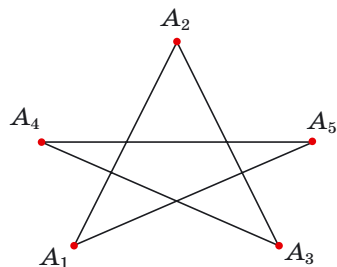


Рис. 2.4



МНОГОУГОЛЬНИК

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многоугольником называют простую замкнутую ломаную.

Отрезки, из которых состоит многоугольник, называют **сторонами многоугольника**, концы сторон — **вершинами многоугольника**.

Многоугольник с n вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется n -угольником и обозначается $A_1A_2 \dots A_n$. Такой многоугольник имеет n сторон.

На рисунке 2.5 изображены пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ и восьмиугольник $A_1A_2 \dots A_8$.

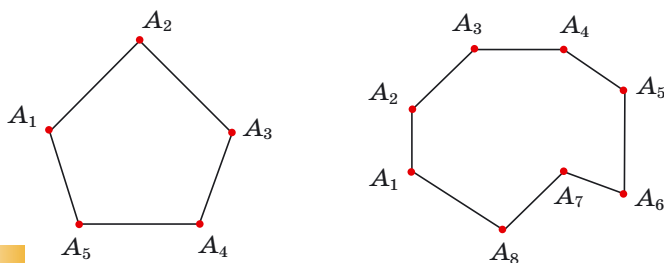


Рис. 2.5

Ломаная на рисунке 2.6 не является многоугольником.

Две вершины, являющиеся концами одной стороны, называют соседними. Стороны, являющиеся смежными отрезками, называют смежными. Две смежные стороны образуют угол многоугольника.

Два угла многоугольника, прилежащие к одной стороне, называют соседними.

Отрезок, соединяющий две вершины, не являющиеся соседними, называют диагональю многоугольника. На рисунке 2.7 A_1A_3 , A_1A_4 , A_2A_4 — диагонали пятиугольника.

Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одну из которых называют внутренней, а другую — внешней областью многоугольника. На рисунке 2.8 внутренние области многоугольников закрашены.

Рис. 2.7

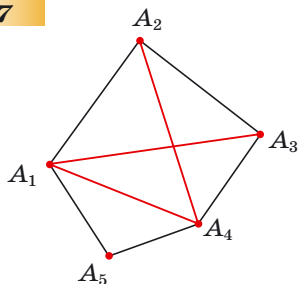
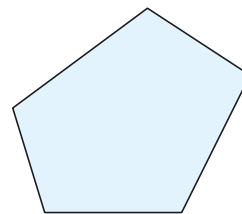
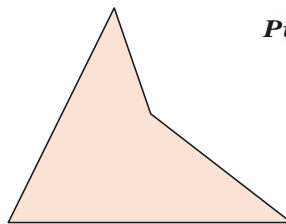


Рис. 2.8



Фигуру, состоящую из сторон многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником.

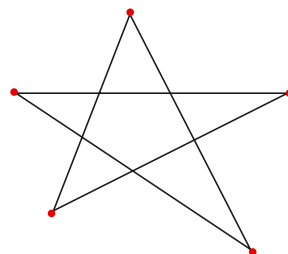


Рис. 2.6

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК Многоугольник называют **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

На рисунке 2.9 многоугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ — выпуклый, а многоугольник $B_1B_2B_3B_4$ не является выпуклым.

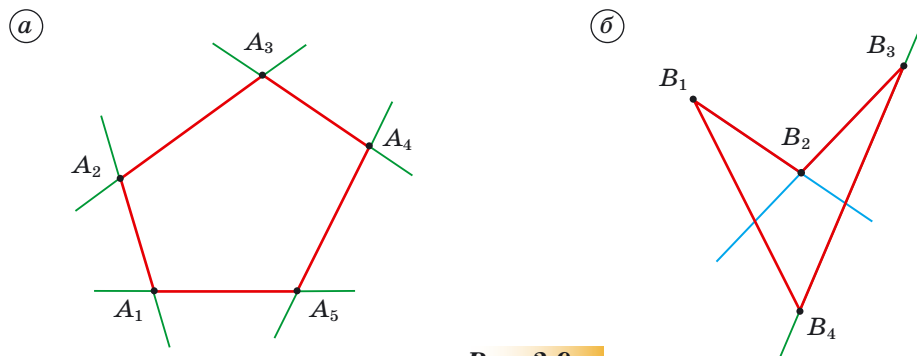


Рис. 2.9

В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые многоугольники.

ТЕОРЕМА. Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Доказательство. Проведём все диагонали многоугольника, исходящие из одной вершины. Диагонали разбивают данный многоугольник на $(n - 2)$ треугольника (рис. 2.10).

Сумма всех углов этих треугольников равна сумме углов n -угольника.

Так как сумма углов треугольника равна 180° , то сумма углов n -угольника будет равна

$$180^\circ \cdot (n - 2). \quad \blacktriangledown$$

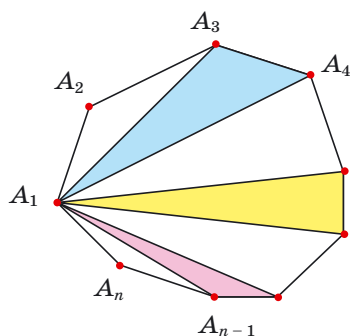


Рис. 2.10

ЗАДАЧА. Чему равна сумма внешних углов выпуклого n -угольника, взятых по одному при каждой вершине?

Решение. Сумма внутреннего угла многоугольника и смежного с ним одного внешнего угла равна 180° . Следовательно, сумма всех внешних углов (взятых по одному у каждой вершины) и внутренних углов n -угольника равна $180^\circ \cdot n$.

Сумма внутренних углов многоугольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$, тогда сумма внешних углов n -угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна

$$180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n - 2) = 360^\circ.$$

ОПИСАННЫЕ И ВПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Окружность называется **вписанной в многоугольник**, если она касается всех его сторон, а многоугольник в этом случае называется **описанным около окружности**.

На рисунке 2.11 окружность вписана в многоугольник.

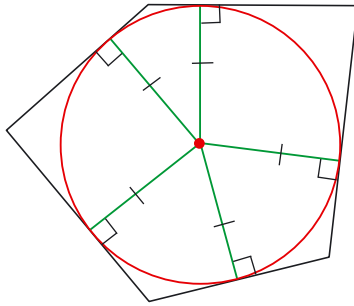


Рис. 2.11

Центр окружности, вписанной в многоугольник, — точка O — равноудалена от всех его сторон. Значит, точка O принадлежит биссектрисам всех углов многоугольника.

Если биссектрисы всех углов многоугольника пересекаются в одной точке, то в такой многоугольник можно вписать окружность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Окружность называется **описанной около многоугольника**, если она проходит через все его вершины. Многоугольник в этом случае называют **вписанным в окружность**.

На рисунке 2.12 окружность описана около многоугольника.

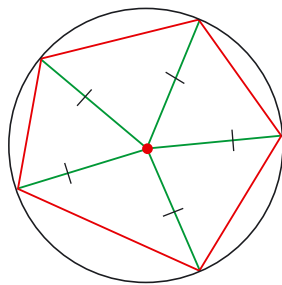


Рис. 2.12

Центр окружности, описанной около многоугольника, равноудалён от всех его вершин. Следовательно, точка O принадлежит серединным перпендикулярам ко всем сторонам многоугольника, вписанного в окружность.

Если серединные перпендикуляры всех сторон многоугольника пересекаются в одной точке, то около такого многоугольника можно описать окружность.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какую геометрическую фигуру называют ломаной?
- Какую ломаную называют замкнутой? незамкнутой? простой?
- Какую фигуру называют многоугольником? Как обозначают многоугольник?
- Какие стороны многоугольника называют смежными?
- Какие углы многоугольника называют соседними?
- Что называют диагональю многоугольника?
- Сколько диагоналей исходит из одной вершины восьмиугольника?
- Может ли диагональ шестиугольника разделить его:
 - а) на два четырёхугольника;
 - б) на два треугольника;
 - в) на треугольник и пятиугольник?
- Что называют периметром многоугольника?
- Какой многоугольник называют выпуклым?
- Чему равна сумма углов выпуклого n -угольника?
- Может ли выпуклый пятиугольник иметь 4 острых угла? 4 прямых угла?
- Какую окружность называют вписанной в многоугольник? Какая точка является её центром?
- Какую окружность называют описанной около многоугольника? Где расположен центр такой окружности?

2.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какой многоугольник называют правильным
- Что называют центром правильного многоугольника
- Формулы радиусов вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника
- Способы построения правильного многоугольника

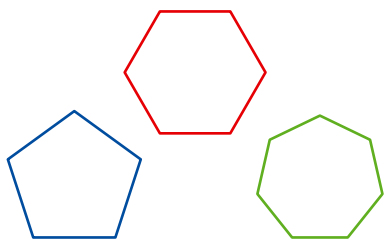


Рис. 2.14

ПРАВИЛЬНЫЕ
МНОГОУГОЛЬНИКИ

Правильные многоугольники всегда привлекали людей своим совершенством, их создаёт сама природа. Правильные многоугольники обладают многими замечательными свойствами.

КАКОЙ МНОГОУГОЛЬНИК НАЗЫВАЮТ ПРАВИЛЬНЫМ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Правильным многоугольником называют выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Равносторонний треугольник и квадрат — примеры правильных многоугольников (рис. 2.13).

На рисунке 2.14 изображены правильные пятиугольник, шестиугольник, семиугольник.

Легко вывести формулу для вычисления угла α_n правильного n -угольника.

Поскольку сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ (n - 2)$ и все углы правильного многоугольника равны, то

$$\alpha_n = \frac{n - 2}{n} 180^\circ.$$

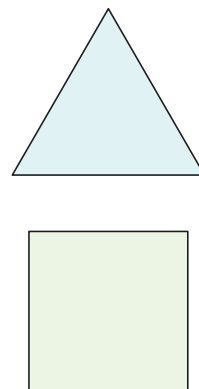


Рис. 2.13

ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК И ОКРУЖНОСТЬ Следующая теорема содержит два важных свойства правильных многоугольников.

ТЕОРЕМА. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность и в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

Доказательство. На рисунке 2.15 изображён правильный многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Докажем, что около него можно описать окружность и в него можно вписать окружность.

Проведём биссектрисы углов A_1 и A_2 и обозначим точку их пересечения буквой O .

Треугольник OA_1A_2 — равнобедренный, так как $\angle 1 = \angle 2$ как половины равных углов.

Соединим точки O и A_3 . $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_3A_2$ по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2 = A_2A_3$, OA_2 — общая сторона, $\angle 2 = \angle 3$). Следовательно,

$$OA_1 = OA_2 = OA_3.$$

Соединив точку O с другими вершинами — A_4 , A_5 , A_6 , ..., A_{n-1} , A_n и проведя аналогичные рассуждения, получим, что

$$OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_{n-1} = OA_n.$$

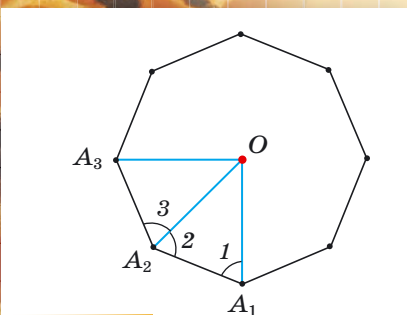


Рис. 2.15

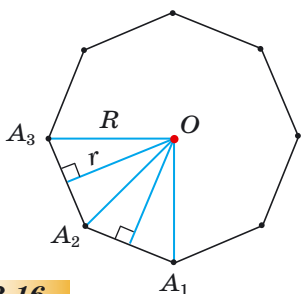


Рис. 2.16

Отсюда следует, что окружность с центром O и радиусом OA_1 проходит через все вершины многоугольника, то есть является описанной около этого многоугольника.

Так как равнобедренные треугольники OA_1A_2 , $OA_2A_3, \dots, OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 равны, то равны и соответственные высоты, проведённые из точки O (рис. 2.16). То есть точка O равноудалена от всех сторон многоугольника, а значит, точка O — центр вписанной в многоугольник окружности. ▼

Таким образом, центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Центр этих окружностей (точку пересечения биссектрис углов многоугольника) называют центром правильного многоугольника.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТОРОНЫ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА, ЕГО ПЛОЩАДИ, РАДИУСОВ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ Обозначим сторону правильного n -угольника a_n , его периметр P , площадь S , радиус вписанной окружности r_n , радиус описанной окружности R_n .

1. Понятно, что периметр правильного многоугольника вычисляется по формуле

$$P_n = a_n \cdot n.$$

2. Докажем, что $S = \frac{1}{2} Pr$.

Соединим центр правильного многоугольника с его вершинами. Тогда многоугольник разобьётся на n равных треугольников (рис. 2.17). Площадь каждого из них будет равна $\frac{1}{2} a_n r_n$, следовательно,

$$S = n \frac{1}{2} a_n r_n = \frac{1}{2} Pr_n.$$

Эту формулу записывают без индексов так:

$$S = \frac{1}{2} Pr.$$

3. Рассмотрим один из треугольников, полученных при соединении центра многоугольника и вершин (рис. 2.18).

$\angle AOB$ называют центральным углом правильного многоугольника. Понятно, что $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$.

Рассмотрим равнобедренный треугольник AOB , в котором OD — высота, а значит, и медиана, и биссектриса. Тогда

$$AD = DB = \frac{1}{2} AB = \frac{a_n}{2}.$$

$$\angle AOD = \angle BOD = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{180^\circ}{n}.$$

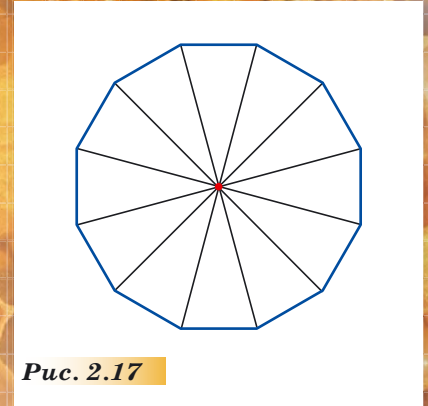
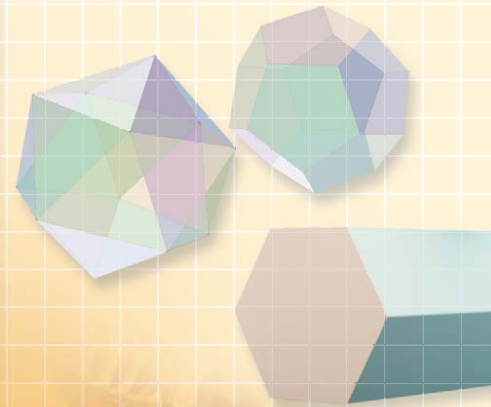


Рис. 2.17

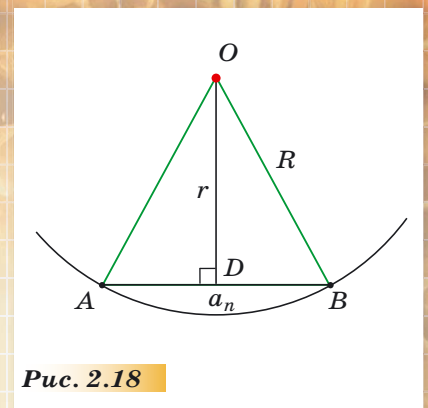


Рис. 2.18

Построение циркулем и линейкой правильных n -угольников, где $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, было известно с древних времён. А вот решить такую же задачу для правильного семиугольника и девятиугольника математикам не удавалось в течение почти двух тысячелетий. И только в самом конце XVIII века великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс доказал, что нельзя построить циркулем и линейкой правильный семиугольник и девятиугольник. В восемнадцатилетнем возрасте Гауссу удалось открыть алгоритм построения правильного семнадцатиугольника.

Рассмотрим треугольник AOD :

$$OA = \frac{AD}{\sin AOD} = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \text{ но } OA = R_n.$$

Таким образом,

$$R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}.$$

Отсюда

$$a_n = 2R_n \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Из треугольника AOD

$$r_n = OD = OA \cdot \cos AOD = R_n \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Или

$$r_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$\text{Итак: } r_n = R_n \cos \frac{180^\circ}{n} \text{ или } r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$



Найдём радиусы вписанной и описанной окружностей правильного треугольника:

$$r_3 = \frac{a_3}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{3}} = \frac{a_3}{2 \operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}.$$

Если домножить числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{3}$, то формула примет вид: $r_3 = \frac{a_3 \sqrt{3}}{6}$.

$$R_3 = \frac{a_3}{2 \sin 60^\circ} = \frac{2a_3}{2\sqrt{3}} = \frac{a_3}{\sqrt{3}} \left(\text{или } \frac{a_3 \sqrt{3}}{3} \right).$$

Заметим, что $R_3 = 2r_3$.

В таблице приведены часто употребляемые формулы для нахождения радиусов вписанной и описанной окружностей. (Выведите их самостоятельно.)

Количество сторон правильного n -угольника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
r_n	$\frac{a_3 \sqrt{3}}{6}$	$\frac{a_4}{2}$	$\frac{a_6 \sqrt{3}}{2}$
R_n	$\frac{a_3 \sqrt{3}}{3}$	$\frac{a_4 \sqrt{2}}{2}$	a_6

ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГУГОЛЬНИКОВ

Рассмотрим способы построения некоторых правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки.

Формула $R_6 = a_6$ показывает, что сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной около него окружности. Это равенство даёт алгоритм построения правильного шестиугольника со стороной a_6 .

1. Проведём окружность, радиус которой равен стороне искомого шестиугольника.

2. Возьмём произвольную точку окружности A_1 — вершину шестиугольника. Из точки A_1 тем же радиусом R проведём дугу окружности, которая пересечёт построенную окружность в точке A_2 (рис. 2.19). Получим вторую вершину шестиугольника.

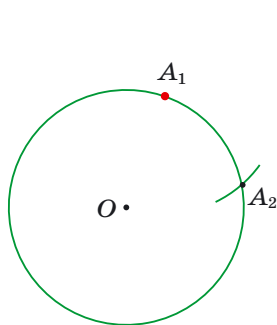


Рис. 2.19

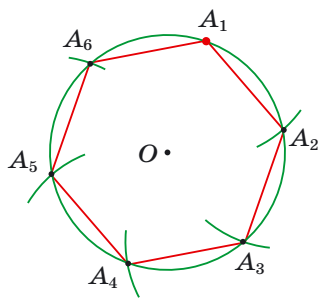


Рис. 2.20

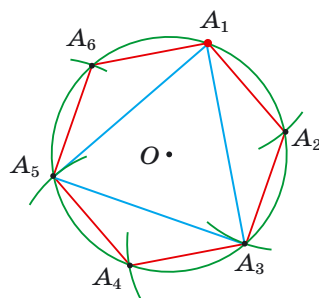


Рис. 2.21

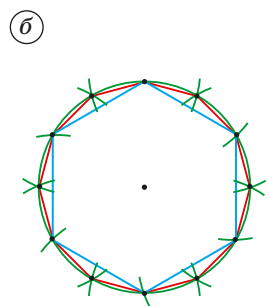
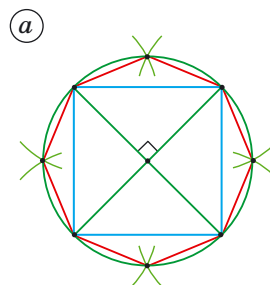


Рис. 2.22

Проведя последовательно такие же дуги с центром во вновь полученных точках, получим все вершины шестиугольника.

3. Соединим отрезками полученные вершины.

Правильный шестиугольник построен (рис. 2.20).

Если соединить через одну вершины правильного шестиугольника, то получим правильный треугольник (рис. 2.21).

Если уже построен правильный n -угольник, то легко построить правильный $2n$ -угольник. Для этого достаточно разделить дуги A_1A_2 ; A_2A_3 ; ... A_nA_1 пополам и соединить полученные точки-вершины с соседними вершинами n -угольника. Таким способом получим $2n$ -угольник. На рисунке 2.22 показано построение правильных восьмиугольника и двенадцатиугольника.

Применяя указанный способ, можно построить с помощью циркуля и линейки целый ряд правильных многоугольников. Так, если построен шестиугольник, то можно построить двенадцатиугольник, затем двадцатичетырёхугольник и вообще правильный $2n$ -угольник, где n — любое целое число, большее двух.

Однако не все правильные многоугольники могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Например, таким образом нельзя построить правильный семиугольник.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какой многоугольник называют правильным?
- Является ли правильным многоугольником ромб с углом 60° ?
- Чему равен угол правильного n -угольника?
- Может ли угол правильного n -угольника быть равен 120° ? 125° ?
- Какое название имеет правильный четырёхугольник?
- Сформулируйте и докажите теорему о вписанной и описанной окружностях правильного n -угольника.
- Что называется центром правильного многоугольника?
- Как найти площадь правильного многоугольника?
- Как найти радиусы вписанной и описанной окружностей, зная сторону правильного n -угольника?
- Как построить с помощью циркуля и линейки правильный шестиугольник?
- Как построить с помощью циркуля и линейки правильный четырёхугольник?

2.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Чему равно отношение длины окружности к диаметру
- Формулу для вычисления длины окружности
- Формулу для вычисления длины дуги окружности

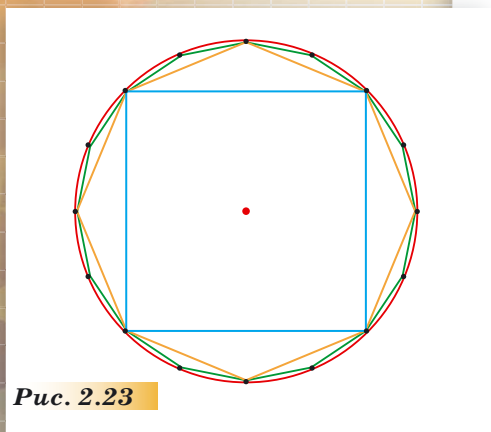


Рис. 2.23

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

Наверное, каждый из нас представляет, что такое длина окружности. Так, если прочной нитью обернуть край чашки или блюдца, а затем растянуть нить, то получим отрезок, длина которого равна длине окружности края чашки. А как вычислить длину любой окружности?

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ На рисунке 2.23 в одну окружность вписаны правильные четырёхугольник, восьмиугольник и шестнадцатиугольник.

Мы видим, что при увеличении числа сторон правильные многоугольники приближаются к окружности и периметр многоугольника всё меньше и меньше отличается от длины окружности. Таким образом, периметр правильного n -угольника, вписанного в окружность, является приближённым значением длины окружности, и чем больше число сторон правильного n -угольника, тем точнее это приближённое значение.

Если всё далее и далее увеличивать число сторон многоугольника, то его периметр P_n будет всё меньше и меньше отличаться от значения C длины окружности. Можно сказать, что при неограниченном увеличении числа сторон правильного многоугольника, вписанного в окружность, его периметр P_n стремится к точному значению C длины окружности.

Математики говорят, что значение длины окружности C — это предел, к которому стремится периметр P_n вписанного в эту окружность правильного n -угольника при неограниченном увеличении числа его сторон.

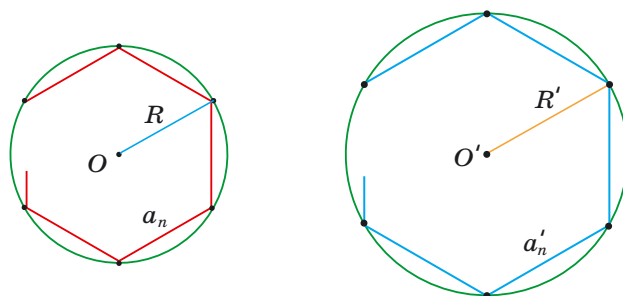


Рис. 2.24

Рассмотрим два правильных n -угольника со сторонами a_n и a'_n , вписанных в окружность с радиусами R и R' (рис. 2.24), и выразим их периметры P_n и P'_n соответственно:

$$P_n = a_n n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n};$$

$$P'_n = a'_n n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Найдём отношение периметров:

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}.$$

Это равенство справедливо при любом значении n . При неограниченном увеличении значения n отношение $\frac{P_n}{P'_n}$ будет сколь угодно мало отличаться от отношения $\frac{C}{C'}$, а значит, сколь угодно мало будет отличаться и число $\frac{2R}{2R'}$ от числа $\frac{C}{C'}$. А это означает, что

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'} \quad \text{или} \quad \frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Таким образом, отношение длины окружности к её диаметру есть одно и то же число для всех окружностей.

Это число обозначается греческой буквой π (читается «пи»).

Из равенства

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

получаем формулу для вычисления длины окружности:

$$C = 2\pi R.$$

Доказано, что π — число иррациональное, то есть оно не может быть представлено в виде конечной десятичной дроби, поэтому используют его приближённое значение с необходимой степенью точности. В школьном курсе математики при решении задач пользуются приближённым значением числа π с точностью до 0,01:

$$\pi \approx 3,14.$$

Современные компьютерные программы позволяют вычислять число π с большой точностью.

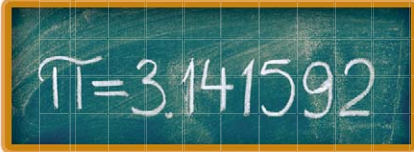
Интересно, что ещё в III веке до н. э. великий древнегреческий учёный Архимед установил приближённое значение π , равное $\frac{22}{7}$. Проверьте с помощью компьютера, что оно менее чем на 0,002 отличается от числа π !

ДЛИНА ДУГИ Выведем формулу для вычисления длины дуги l с градусной мерой α . Так как градусная мера всей окружности равна 360° , то длина дуги в 1° равна

$$\frac{C}{360} = \frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}.$$

Тогда длина дуги l с градусной мерой α выражается формулой

$$l = \frac{\pi R}{180} \alpha.$$



$$\pi = 3.141592$$



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Чему равно отношение длин двух окружностей?
- Что в математике обозначают греческой буквой π ?
- Назовите приближённое значение π с точностью до сотых.
- Назовите формулу, по которой вычисляют длину окружности.
- Чему равна длина дуги в 1° окружности радиуса R ?
- По какой формуле вычисляют длину дуги, градусная мера которой равна α ?

2.4

ПЛОЩАДЬ КРУГА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Формулу площади круга
- Что называют круговым сектором
- Что называют круговым сегментом

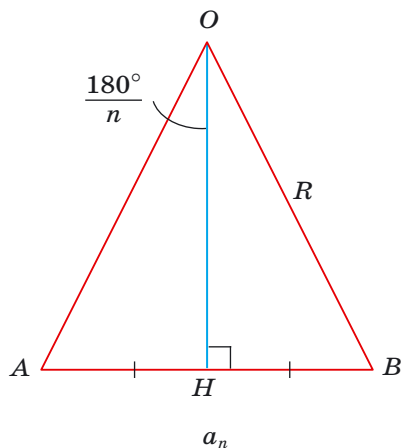


Рис. 2.25

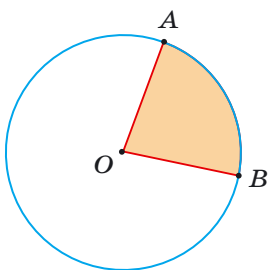


Рис. 2.26

Вы знаете, что кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью. Как же вычислить площадь, занимаемую кругом?

ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ КРУГА Для нахождения площади круга рассмотрим, как и при нахождении длины окружности, правильные многоугольники, вписанные в окружность. При увеличении числа сторон правильные многоугольники приближаются к окружности и площадь многоугольников всё меньше и меньше отличается от площади круга.

Изобразим треугольник AOB — фрагмент правильного n -угольника с центром в точке O , стороной $AB = a_n$ и радиусом R описанной окружности. Проведём перпендикуляр OH к стороне AB (рис. 2.25).

$$\text{Тогда } S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} a_n R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

А так как радиусы описанной окружности, проведённые к вершинам, разбивают правильный n -угольник на n равных треугольников, то:

$$S_n = n S_{AOB} = \frac{1}{2} n a_n R \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} P_n R \cos \frac{180^\circ}{n},$$

где P_n — периметр правильного n -угольника.

При неограниченном возрастании числа n дробь $\frac{180}{n}$ будет сколь угодно мало отличаться от 0, то есть стремиться к нулю, следовательно, $\cos \frac{180^\circ}{n}$ будет стремиться к $\cos 0^\circ$, то есть к 1. Периметр P_n будет стремиться к длине окружности C , а площадь S_n — к площади круга. Тогда при неограниченном возрастании n получаем:

$$S = \frac{1}{2} C \cdot R = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

Таким образом, формула площади круга имеет вид:

$$S = \pi R^2.$$

ФОРМУЛЫ КРУГОВОГО СЕКТОРА И СЕГМЕНТА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Круговым сектором или сектором называют часть круга, ограниченную дугой окружности и двумя радиусами.

На рисунке 2.26 радиусы OA и OB разделили круг на две части. Каждую из этих частей называют круговым сектором или просто сектором.

Так как сектор с дугой в 1° составляет $\frac{1}{360}$ часть круга, то его площадь равна $\frac{\pi R^2}{360}$, где R — радиус круга. Тогда площадь сектора с дугой в α градусов будет вычисляться по формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha.$$

На рисунке 2.27 хорда AB разделила круг на две части, каждую из которых называют сегментом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Круговым сегментом или сегментом называют часть круга, ограниченную хордой и дугой, стягиваемой этой хордой.

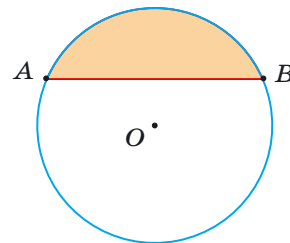


Рис. 2.27

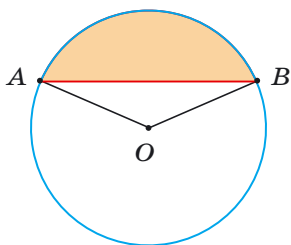


Рис. 2.28

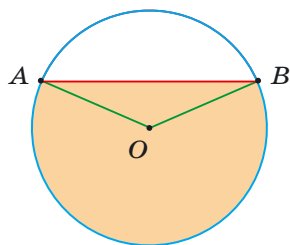


Рис. 2.29

Если дуга меньше 180° (рис. 2.28), то площадь сегмента можно найти, вычтя из площади сектора площадь треугольника, сторонами которого являются хорда и два радиуса, ограничивающие сектор.

Если же дуга больше 180° (рис. 2.29), то к площади сектора нужно прибавить площадь этого же треугольника.

Диаметр делит круг на два сегмента, называемые полукругом (рис. 2.30). Площадь полукруга равна половине площади круга:

$$S = \frac{\pi R^2}{2}, \text{ где } R \text{ — радиус круга.}$$

О КВАДРАТУРЕ КРУГА Знаменитая задача Античности — построение с помощью циркуля и линейки квадрата, площадь которого равна площади данного круга, называется *квадратурой круга*. Математики эту задачу безуспешно пытались решить в течение двух тысячелетий. И только в 1882 году немецкий математик Карл Луис Фердинанд фон Линдман (1852–1939) доказал средствами алгебры, что это невозможно.

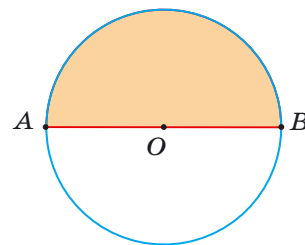


Рис. 2.30

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- По какой формуле вычисляют площадь круга?
- Может ли площадь многоугольника, вписанного в окружность, быть больше площади круга, ограниченного этой окружностью?
- Что называют круговым сектором или сектором?
- Чему равна площадь кругового сектора?
- Что называют сегментом?
- Как вычисляют площадь сегмента?
- Как изменится длина окружности и площадь круга, если радиус окружности увеличить в 4 раза?

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

П. 2.1

К Т 1

Изобразите ломаную: а) замкнутую; б) незамкнутую; в) с самопересечениями; г) без самопересечений; д) замкнутую с самопересечениями; е) незамкнутую с самопересечением; ж) незамкнутую без самопересечений. Какую из изображённых вами ломаных называют многоугольником? Как называется ваш многоугольник?

2

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Вершины ломаной не лежат на одной прямой. Докажите, что длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего его концы.
2. Докажите, что у замкнутой ломаной расстояние между любыми двумя вершинами не больше половины длины ломаной.
3. Докажите, что у замкнутой ломаной длина каждого звена не больше суммы длин остальных звеньев.
4. Может ли замкнутая ломаная иметь звенья длиной:
а) 1 см, 3 см, 5 см, 7 см, 9 см? б) 2 см, 4 см, 6 см, 8 см, 22 см?

К Т 3

- а) Изобразите выпуклый многоугольник, не являющийся треугольником или четырёхугольником. Проведите все диагонали выпуклого многоугольника. Сколько диагоналей вы провели?
- б) Изобразите выпуклый n -угольник, где $n > 4$, и проведите его диагонали, исходящие из одной вершины.

К Т 4

- а) Изобразите пятиугольник, у которого нет параллельных сторон и который является: 1) выпуклым; 2) невыпуклым.
- б) Изобразите пятиугольник, у которого есть параллельные стороны и который является: 1) выпуклым; 2) невыпуклым.

К 5

Проведите все диагонали выпуклого пятиугольника. Сколько получилось диагоналей? На какие многоугольники диагонали разделили пятиугольник?

К 6

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Постройте: а) выпуклый шестиугольник $ABCDEF$; б) выпуклый семиугольник $ABCDEFK$.
2. Сколько диагоналей выходят из одной точки в каждом случае?
3. Сколько всего диагоналей у выпуклого шестиугольника?
4. Подумайте, как можно найти число диагоналей выпуклого семиугольника. Предложите разные способы.
5. Сколько диагоналей у выпуклого n -угольника?

К 7

Найдите сумму углов: а) выпуклого десятиугольника; б) выпуклого пятнадцатиугольника.

К Т 8

С соседом по парте выполните задания.

- 1) Начертите окружность и впишите в неё четырёхугольник. При каком условии около четырёхугольника можно описать окружность? Где расположен центр окружности, описанной около четырёхугольника?
- 2) Начертите четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Где находится центр такой окружности? Постройте эту окружность. При каком условии в четырёхугольник можно вписать окружность?
- 3) Укажите вид параллелограмма, в который можно вписать окружность.

4) Можно ли описать окружность около прямоугольника? параллелограмма?
 5) Что можно сказать про центры вписанной и описанной около квадрата окружностей?

6) Можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$, если $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 140^\circ$, $\angle C = 100^\circ$, $\angle D = 80^\circ$?

К Т 9

а) 1) Ответьте на вопросы: «Около всякого ли треугольника можно описать окружность? Как найти центр окружности, описанной около треугольника?»
 2) Начертите произвольный треугольник и опишите около него окружность.
 3) Где находится центр окружности, описанной: а) около прямоугольного треугольника? б) около равностороннего треугольника?

б) 1) Ответьте на вопросы: «Во всякий ли треугольник можно вписать окружность? Как найти центр окружности, вписанной в треугольник?»

2) Начертите произвольный треугольник и впишите в него окружность.

3) Что можно сказать про центры вписанной в равносторонний треугольник и описанной около него окружностей?

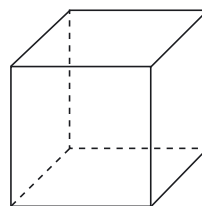


Рис. 1

10

Какого наименьшего диаметра должно быть круглое бревно, чтобы из него можно было выпилить брус, поперечным сечением которого является: а) квадрат со стороной 18 см? б) равносторонний треугольник со стороной 20 см?

К Т 11

На изображении куба (рис. 1) нанесите разными способами (используйте цветные карандаши): а) ломаную, состоящую из четырёх звеньев — ребёр куба, так, чтобы никакие три звена не лежали в одной плоскости;

б) ломаную, состоящую из пяти звеньев, так, чтобы никакие три звена не лежали в одной плоскости.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат (рис. 2). Найдите: а) периметр квадрата; б) радиус вписанной окружности; в) радиус окружности, описанной около квадрата.

2. На клетчатой бумаге с размером клетки 5×5 изображён прямоугольный треугольник (рис. 3). Найдите: а) длину средней линии, параллельной гипотенузе; б) радиус окружности, описанной около треугольника.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольный треугольник (рис. 4). Найдите: а) длину меньшего катета; б) длину средней линии, параллельной большему катету; в) радиус окружности, описанной около треугольника.

4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник (рис. 5). Найдите: а) высоту треугольника; б) радиус вписанной в треугольник окружности; в) радиус окружности, описанной около треугольника.



Рис. 2

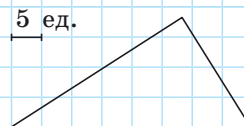


Рис. 3

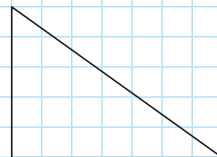


Рис. 4

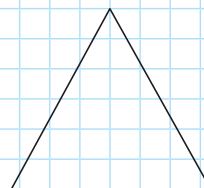


Рис. 5

5. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, на 3 см меньше радиуса описанной около него окружности. Найдите: а) эти радиусы; б) периметр треугольника.
6. Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен 10. Чему равен радиус окружности, описанной около квадрата?
7. а) В треугольнике ABC : $BC = 2\sqrt{5}$, угол C равен 90° . Радиус окружности, описанной около треугольника, равен 4. Найдите AC .
б) В треугольнике ABC : $\angle C = 90^\circ$, $AC = 15$, $BC = 8$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.
8. а) Высота равностороннего треугольника равна 3. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.
б) Высота равностороннего треугольника равна 6. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.
9. а) Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит точкой касания боковую сторону на отрезки длиной 2,5 и 3, считая от вершины треугольника, противоположащей основанию. Найдите периметр треугольника.
б) Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит точкой касания его боковую сторону на отрезки длиной 4 и 15, считая от основания. Найдите периметр треугольника.
10. а) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, основание — 6. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
б) В равнобедренный треугольник с основанием 12 см вписана окружность радиуса 3 см. Найдите боковую сторону треугольника.
11. а) Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, стороны которого равны 10 и $2\sqrt{11}$.
б) Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность радиуса $4\sqrt{2}$.
12. а) Сторона ромба равна $8\sqrt{3}$, острый угол равен 60° . Найдите радиус вписанной в ромб окружности.
б) Тупой угол ромба равен 120° , а сторона — $12\sqrt{3}$. Найдите радиус вписанной в ромб окружности.
13. а) В трапецию вписана окружность радиуса $3\sqrt{2}$. Чему равна высота трапеции?
б) Найдите радиус окружности, вписанной в трапецию, если её высота равна $6\sqrt{5}$.
14. а) Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 48, а средняя линия равна 8. Найдите боковую сторону трапеции.
б) Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 12 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.
15. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 20, её боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.
16. а) Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 56, а две его стороны — 7 и 25. Найдите большую из сторон четырёхугольника.
б) Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 28, а две его стороны — 4 и 8. Найдите меньшую из остальных сторон четырёхугольника.

17. Стороны треугольника равны 8 см, 9 см и 11 см. Через вершину, противоположную меньшей стороне, проведена прямая, делящая треугольник на два треугольника с равными периметрами. В каком отношении эта прямая делит меньшую сторону?

18. а) Периметр четырёхугольника равен 100. Одна из его диагоналей делит четырёхугольник на два треугольника с периметрами 72 и 79. Чему равна эта диагональ?

б) Диагональ длиной 15 делит четырёхугольник на два треугольника с периметрами 40 и 60. Чему равен периметр четырёхугольника?

П. 2.2

К Т 12

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Начертите окружность радиуса 3,5. Постройте вписанный в эту окружность: а) правильный шестиугольник; б) правильный двенадцатиугольник; в) правильный треугольник.

Как, имея изображение правильного двенадцатиугольника, построить правильный двадцатичетырёхугольник?

2. Начертите окружность радиуса 3 см. Постройте вписанный в эту окружность: а) правильный четырёхугольник; б) правильный восьмиугольник. Как, имея изображение правильного восьмиугольника, можно построить правильный тридцатидвухугольник?

К 13

Найдите сумму углов: а) правильного восьмиугольника; б) правильного двенадцатиугольника.

К Т 14

Чему равен угол правильного n -угольника, если: а) $n = 6$? б) $n = 15$? в) $n = 20$?

К 15

Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если сумма его углов равна: а) 2880° ? б) 720° ?

К Т 16

Существует ли правильный многоугольник, угол которого равен: а) 75° ? б) 156° ?

К Т 17

Сколько сторон у правильного n -угольника, если его центральный угол равен: а) 24° ? б) 20° ?

К 18

Сколько сторон у правильного n -угольника, вписанного в окружность, если градусная мера дуги, которую стягивает сторона правильного n -угольника, равна: а) 18° ? б) 12° ?

К Т 19

а) Начертите окружность. С помощью циркуля и линейки впишите в неё: 1) правильный треугольник; 2) квадрат.

б) Начертите окружность. С помощью циркуля и линейки опишите около неё: 1) квадрат; 2) правильный треугольник.

К 20

а) Около окружности, радиус которой равен $10\sqrt{2}$, описан квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

б) В окружность, радиус которой равен $12\sqrt{2}$, вписан квадрат. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

21

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 7. Чему равен радиус окружности, описанной около этого треугольника?

22

а) Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен $3\sqrt{5}$. Найдите: 1) сторону этого треугольника; 2) радиус вписанной в треугольник окружности.

б) Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна 4. Найдите: 1) радиус вписанной в него окружности; 2) радиус описанной около него окружности.

К 23

а) Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 16. Найдите высоту этого треугольника.

б) Высота правильного треугольника, вписанного в окружность, равна 21. Найдите радиус этой окружности.

Т 24

Найдите число сторон правильного n -угольника, вписанного в окружность, если угол между стороной этого n -угольника и радиусом окружности, проведённым в один из концов этой стороны, равен: а) 75° ; б) 70° .

К 25

а) В окружность вписан правильный шестиугольник, сторона которого равна 6. Найдите сторону квадрата, описанного около этой окружности.

б) Около окружности описан квадрат со стороной 6. Чему равна сторона правильного треугольника, вписанного в эту окружность?

26

а) Найдите сторону правильного многоугольника, периметр которого равен 60, а угол — 108° .

б) Найдите периметр правильного многоугольника, если его сторона равна 4, а угол — 150° .

К 27

Докажите, что внешний угол правильного многоугольника равен его центральному углу.

28

Выразите сторону, периметр и площадь правильного треугольника через: а) радиус вписанной окружности; б) радиус описанной окружности.

К 29

а) Стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника равны. Найдите отношение площадей этих многоугольников.

б) Найдите отношение площадей двух правильных шестиугольников — описанного около данной окружности и вписанного в неё.

Т 30

Заполните таблицу формул.

n	R через a_n	r через a_n	a_n через R	a_n через r	R через r	r через R
3						
4						
6						

К Т 31

а) Правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник имеют одинаковые периметры. Найдите отношение их площадей.

б) В одну окружность вписаны правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник. Найдите отношение их площадей.

К 32

а) Углы квадрата со стороной 20 срезали так, что получили правильный восьмиугольник. Чему равна сторона этого восьмиугольника?

б) Постройте с помощью циркуля и линейки правильный восьмиугольник, «срезая» углы квадрата.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. а) Площадь квадрата равна 56. Найдите его диагональ.

б) Диагональ квадрата равна 12. Найдите его площадь.

2. а) Площадь квадрата равна площади прямоугольника со сторонами 5 и 15. Чему равна сторона квадрата?
 б) Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна площади прямоугольника со сторонами 5 и 8.
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC (рис. 6, а—в). В каждом случае найдите: а) длину средней линии, параллельной стороне AC ; б) площадь треугольника.

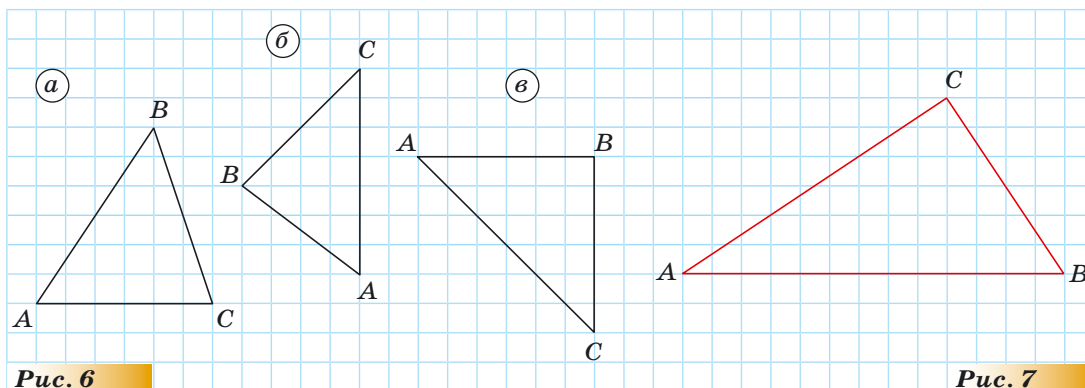


Рис. 6

Рис. 7

4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольный треугольник (рис. 7). Найдите: а) радиус описанной около треугольника окружности; б) высоту треугольника, проведённую к гипотенузе; в) площадь треугольника; г) меньший из катетов; д) радиус вписанной в треугольник окружности.
5. а) Площадь прямоугольного треугольника равна 50 см. Один из катетов равен 5 см. Найдите другой катет, гипотенузу и высоту, проведённую к гипотенузе.
 б) Площадь прямоугольного треугольника равна 150, гипотенуза — 25. Найдите высоту и катеты треугольника.
6. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен 2 см, а радиус описанной около этого треугольника окружности равен 5 см. Найдите площадь треугольника.
7. а) Площадь прямоугольного треугольника $8\sqrt{3}$, гипотенуза равна 8. Найдите острые углы треугольника.
 б) В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна 2 и составляет с гипотенузой угол в 45° . Найдите площадь треугольника.
8. а) Основания трапеции равны 18 и 7, высота — 4. Найдите площадь трапеции.
 б) Площадь трапеции равна 108, средняя линия трапеции равна 18. Найдите высоту трапеции.
9. Площадь треугольника ABC равна 28. MN — средняя линия, параллельная AC . Найдите площадь треугольника MBN .
10. По данным рисунка 8 найдите площадь треугольника ABC , если $DE \parallel AB$ и площадь треугольника DEC равна: а) 80; б) 72.

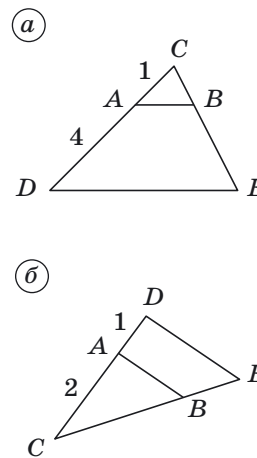


Рис. 8

11. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите:

а) S_{MBN} , если $S_{ABC} = 81$, $MN = 14$, $AC = 21$;

б) площадь трапеции $AMNC$, если $S_{MBN} = 16$, $AM : MB = 3 : 2$.

12. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. AN пересекается с CM в точке O , $S_{MON} = 9$. Найдите S_{ABC} .

13. а) Периметры подобных треугольников относятся как $2 : 3$. Площадь меньшего треугольника равна 36. Чему равна площадь большего треугольника?

б) Площадь одного из подобных треугольников равна 100, другого — 25. Чему равен коэффициент подобия этих треугольников?

14. а) Площадь прямоугольного треугольника равна 12. Один из катетов на 2 больше другого. Чему равен периметр треугольника?

б) Площадь прямоугольного треугольника равна 10, один из катетов на 1 меньше другого. Чему равен радиус окружности, описанной около треугольника?

15. Две стороны треугольника равны 6 и 8, его площадь — 24. Найдите радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей.

16. Треугольник вписан в окружность, два из его углов равны 20° и 80° . Найдите центральные углы, под которыми видны стороны треугольника.

П. 2.3

К Т 33

а) Как изменится длина окружности, если радиус окружности: 1) увеличить в 2 раза? 2) уменьшить в 3 раза? 3) увеличить в t раз? 4) уменьшить в t раз?

б) Как изменится радиус окружности, если длину окружности: 1) увеличить в t раз? 2) уменьшить в t раз?

К 34

Найдите: а) длину окружности, радиус которой равен 3 см; б) радиус окружности, длина которой равна 15,7 см.

К 35

Найдите длину окружности: а) описанной около правильного шестиугольника с периметром 48 см; б) вписанной в квадрат площадью 196 см^2 ; в) описанной около равностороннего треугольника со стороной $5\sqrt{3}$ см.

Т 36

Найдите длину окружности: а) вписанной в равносторонний треугольник площадью $12\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) описанной около квадрата с диагональю 10 см.

37

Найдите радиус Земли, исходя из того, что 1 м составляет одну сорок миллионную часть длины экватора.

38

Вычислите длину круговой орбиты искусственного спутника Земли, если он вращается на расстоянии 250 км от земной поверхности, а радиус Земли равен 6370 км.

К Т 39

Найдите длину окружности, описанной около: а) квадрата с боковой стороной a ; б) правильного треугольника со стороной a .

К Т 40

Найдите длину окружности, вписанной: а) в квадрат со стороной a ; б) в равносторонний треугольник со стороной a .

К Т 41

Найдите длину окружности: а) вписанной в ромб с диагоналями 30 см и 40 см; б) описанной около прямоугольного треугольника с катетами 14 см и 48 см.

- Т 42** Найдите длину окружности: а) вписанной в треугольник со сторонами 8, 26 и 30 см; б) описанной около прямоугольника со сторонами 6 см и 8 см.
- Т 43** Найдите длину окружности: а) вписанной в правильный восьмиугольник со стороной 10 см; б) описанной около правильного восемнадцатиугольника со стороной, равной 2 см; в) вписанной в правильный шестиугольник с площадью $6\sqrt{3}$ см².
- 44** Найдите длину окружности, описанной около: а) равнобедренного треугольника со стороной a и основанием b ; б) прямоугольного треугольника с катетами a и b ; в) прямоугольного треугольника с меньшим катетом a и противолежащим ему острым углом α .
- 45** Найдите длину окружности, вписанной: а) в равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a ; б) в прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α ; в) в равнобедренный треугольник с основанием a и острым углом α при основании.
- Т 46** а) Представьте, что Землю по экватору обтянули верёвкой, а затем верёвку равномерно удлинили на 1 м. Пролезет ли в образовавшийся зазор ручка, которой вы пишете?
б) Радиус окружности увеличили на 100. Докажите, что длина окружности увеличилась на величину, не зависящую от радиуса данной окружности.
- К Т 47** Найдите длину дуги окружности радиуса R , если её градусная мера равна: а) 90° ; б) 200° ; в) 300° .
- 48** Длина маятника настенных часов равна 20 см, а угол его колебаний составляет 30° . Найдите длину дуги, которую описывает конец маятника.
- Т 49** а) Чему равен радиус окружности, в которой дуга в 1° имеет длину 1 м?
б) Вычислите длину дуги в 1° экватора Земли, если радиус Земли приближённо равен 6370 км.
- Т 50** На сторонах длиной 3, 4 и 5 прямоугольного треугольника как на диаметрах построены полуокружности. Найдите сумму длин дуг этих полуокружностей.
- 51** а) Сторона треугольника равна 18, а прилежащие к ней углы равны 15° и 45° . Найдите длины дуг, на которые делят окружность, описанную около треугольника, его вершины.
б) Треугольник со стороной 10 м и прилежащими к ней углами 120° и 30° вписан в окружность. Чему равны длины дуг, на которые вершины треугольника делят окружность?
- Т 52** Насколько удлинился бы земной экватор, если радиус земного шара увеличить на 1 см?
- К 53** Найдите длину дуги, которую описывает минутная стрелка длиной 20 см а) за 5 минут; б) за 20 минут.
- К 54** Часы показывают 3 часа. Какой путь пройдёт конец минутной стрелки до того момента, когда она догонит часовую стрелку?
- 55** Определите длину пути, который описывают в течение 2 часов конец часовой стрелки и конец минутной стрелки часов на Спасской башне Кремля, если длина часовой стрелки равна 2,97 м, а минутной — 3,27 м.
- 56** Около трапеции описана окружность. Основания трапеции равны 4 и 14, а боковая сторона — 13. Найдите длину окружности.

57

- а) Докажите, что сторона правильного восьмиугольника вычисляется по формуле $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, где R — радиус описанной окружности.
 б) Докажите, что сторона правильного двенадцатиугольника вычисляется по формуле $a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, где R — радиус описанной окружности.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

- Стороны треугольника относятся как 5 : 6 : 5. Биссектриса, проведённая к большей стороне, равна 32 см. Найдите площадь треугольника.
- а) Биссектриса, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна 10 см, а высота, проведённая к боковой стороне, — 12 см. Найдите площадь треугольника.
 б) Высота, проведённая к боковой стороне равнобедренного треугольника, равна 24 см, а медиана, проведённая к основанию, — 20 см. Найдите площадь треугольника.
- Катеты прямоугольного треугольника равны 15 см и 20 см. Найдите длины отрезков, на которые делит гипотенузу высота, проведённая к ней.
- а) Периметр прямоугольного треугольника равен 40 см, а разность катетов равна 7 см. Найдите площадь треугольника.
 б) Периметр прямоугольного треугольника равен 20 см, а разность гипотенузы и катета равна 1 см. Найдите площадь треугольника.
- а) Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к боковой стороне, равна 15 см, а его основание — 16 см. Найдите расстояние от точки пересечения медиан до вершины треугольника, противоположащей основанию.
 б) Расстояние от точки пересечения медиан до вершины равнобедренного треугольника, противоположащей основанию, равно 24 см, а его основание — 32 см. Найдите медиану, проведённую к боковой стороне.

П. 2.4

К Т 58

Найдите площадь круга, диаметр которого равен: а) 10 см; б) 4,8 м.

К Т 59

- а) Выразите площадь круга через его диаметр d .
 б) Выразите площадь круга через длину C его окружности.
 в) Выразите длину окружности через площадь S круга, ограниченного этой окружностью.

К 60

Как изменится площадь круга, если его радиус:
 а) увеличить в 5 раз? б) уменьшить в m раз?

61

- а) Длина окружности цирковой арены равна 81,64 м. Чему равна площадь арены цирка (считать $\pi \approx 3,14$)?
 б) Диаметры окружностей стрелковой мишени (рис. 9) равны 2; 4; 6; 8. Найдите площадь каждого кольца.

62

На рисунке 10 изображена окружность. Используя свойства клетчатой бумаги с размером клетки 1×1 , найдите:

- а) диаметр окружности; б) длину окружности;
 в) площадь круга, ограниченного этой окружностью;
 г) площадь кругового сектора, выделенного голубым цветом; д) площадь сегмента, выделенного голубым цветом.

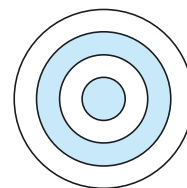


Рис. 9

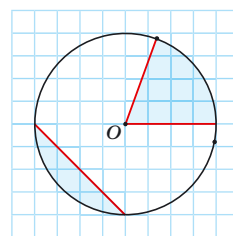


Рис. 10

К Т 63

- а) Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около равностороннего треугольника со стороной a .
 б) Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, вписанной в правильный треугольник со стороной a .

К Т 64

На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены полуокружности. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

К 65

- а) Как вычислить площадь сектора, если известны: 1) длина его дуги и радиус круга? 2) длина его дуги и его центральный угол?
 б) Радиус круга равен 9. Найдите площадь сектора, если градусная мера его дуги равна: 1) 30° ; 2) 15° ; 3) 100° .

66

Площадь сектора равна 10π . Найдите градусную меру дуги этого сектора, если радиус круга равен: а) 20; б) 5.

К 67

- а) Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой c .
 б) Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a .

К 68

- а) Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, вписанной в равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при основании α .
 б) Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около равнобедренного треугольника со стороной a и углом при вершине, равным 2α .

К Т 69

- а) В окружность радиуса R вписан правильный треугольник (рис. 11). Найдите площадь одного из закрашенных сегментов.
 б) В окружность радиуса R вписан квадрат (рис. 12). Найдите площадь одного из закрашенных сегментов.

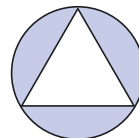


Рис. 11

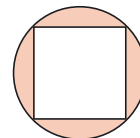


Рис. 12

К Т 70

Найдите площадь кольца, ограниченного концентрическими окружностями, радиусы которых равны $\frac{12}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{7}{\sqrt{\pi}}$.

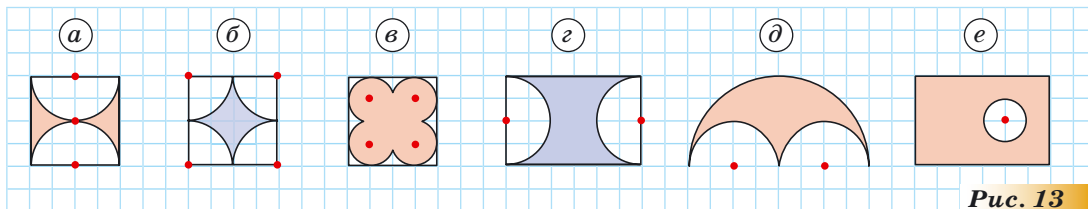


Рис. 13

Т 71

Вычислите площадь каждой закрашенной фигуры, изображённой на рисунке 13, считая площадь одной клетки равной 1 кв. ед.

К Т 72

(Задача Гиппократа.) Около прямоугольника описали окружность и на каждой его стороне как на диаметре построили полуокружность (рис. 14). Докажите, что сумма площадей закрашенных фигур равна площади прямоугольника.

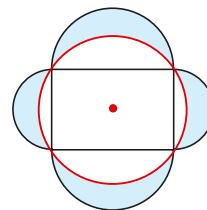


Рис. 14

К Т 73

В бассейне решено заменить две водопроводные трубы диаметром 10 см и 20 см на одну с той же пропускной способностью, что и эти две. Какого диаметра должна быть труба?

К 74

Радиус круга равен R . Найдите площадь кругового сегмента, дуга которого равна: а) 60° ; б) 240° .

К 75

а) Окружность делит каждую сторону равностороннего треугольника на три равные части длиной 2 см. Найдите площадь части треугольника, лежащей внутри окружности.

б) Стороны треугольника равны 17, 25 и 28 см. Окружность с центром на большей стороне треугольника касается двух других его сторон. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

К Т 76

В круге радиуса R проведена хорда. Угол, под которым она видна из центра, равен α . Как найти площади полученных сегментов круга?

К 77

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Периметр квадрата равен длине окружности круга. Какая из фигур — круг или квадрат — имеет большую площадь?

2. Периметр правильного шестиугольника равен длине окружности круга. У какой из этих фигур больше площадь?

3. Квадрат и круг равновелики. Что больше — периметр квадрата или длина окружности круга?

4. Правильный шестиугольник и круг равновелики. Что больше — периметр шестиугольника или длина окружности круга?

5. Найдите сторону правильного шестиугольника, равновеликого кругу радиуса 6.

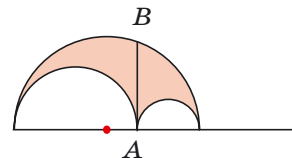


Рис. 15

78

Докажите, что площадь арбелоса Архимеда может быть вычислена по формуле $\frac{1}{4} \pi AB^2$ (рис. 15).

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. На рисунке 16 изображён ромб $ABCD$. Пользуясь свойствами клетчатой бумаги, найдите: а) площадь ромба; б) периметр ромба; в) $\tan \angle ACB$; г) $\cos \angle DBC$.

2. а) Площадь ромба равна 32. Одна из его диагоналей в 2 раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.

б) Большая диагональ ромба составляет со стороной угол, равный 30° , периметр ромба равен 20 см. Найдите меньшую диагональ ромба.

3. а) Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 81.

б) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 14 см, угол, противолежащий основанию, равен 150° . Найдите площадь треугольника.

4. а) Основания равнобедренной трапеции равны 4 и 16, а её периметр равен 40. Найдите площадь трапеции.

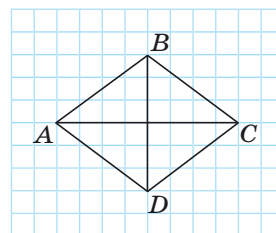


Рис. 16

- б) Площадь равнобедренной трапеции равна 48 см^2 , а периметр — 34 см . Найдите боковую сторону трапеции, если её средняя линия равна 12 см .
5. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой m . Точка A_1 — проекция точки A на прямую m , точка B_1 — проекция точки B на прямую m . $AA_1 = 5$, $BB_1 = 10$, $A_1B_1 = 12$. Чему равно расстояние между точками A и B ?
6. Концы отрезка удалены от прямой m на расстояния 6 и 20 . Найдите расстояние от середины отрезка до прямой m . Сколько решений имеет задача?
7. а) Начертите координатную плоскость. Заштрихуйте множество точек плоскости, удовлетворяющих неравенству $x > 0$.
б) Начертите координатную плоскость. Заштрихуйте множество точек плоскости, удовлетворяющих неравенству $y \leq 0$.



1

В круге радиуса 1 проведены две непересекающиеся хорды длиной $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Они разделили круг на три части. При этом площадь наибольшей части больше, чем $2,3$. Найдите площадь наименьшей части.

2

В треугольнике ABC угол B равен 140° , высота к стороне AC равна 1 . Имеется круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке B . Найдите площадь общей части треугольника ABC и круга.

3

Отрезки AM и CN — высоты остроугольного треугольника ABC , точка O — центр описанной окружности. Угол ABC равен α , а площадь четырёхугольника $NOMB$ равна S . Найдите сторону AC .

4

Вершины правильного шестиугольника со стороной 2 служат центрами кругов радиуса $\sqrt{2}$. Найдите площадь части шестиугольника, расположенной вне этих кругов.

К 5

Начертите круг и постройте две окружности с тем же центром, разделяющие круг на три равновеликие части.

6

Постройте границу круга, площадь которого равна: а) площади данного полукруга; б) площади данного кругового сектора с дугой в 60° .

7

На катетах AC и BC прямоугольного треугольника во внешнюю сторону построены квадраты $ACKL$ и $BCMN$. Доказать, что четырёхугольник, ограниченный катетами и прямыми LB и NA , равновелик треугольнику, образованному прямыми LB , NA и гипотенузой AB .

8

Докажите, что площадь восьмиугольника, образованного прямыми, соединяющими вершины параллелограмма с серединами его сторон, равна $\frac{1}{6}$ площади параллелограмма.

9

Какими правильными многоугольниками можно замостить плоскость?

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Какую геометрическую фигуру называют ломаной? Какие вы знаете виды ломаных?
- Какую геометрическую фигуру называют многоугольником?
- Какие стороны многоугольника называют смежными?
- Что называют периметром многоугольника?
- Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов выпуклого n -угольника.
- Сформулируйте и докажите теорему о сумме внешних углов многоугольника.
- Какой многоугольник называют правильным?
- Какую окружность называют вписанной в многоугольник, а какую — описанной около многоугольника? Где располагаются центры этих окружностей?
- Сформулируйте и докажите теорему о вписанной и описанной окружностях правильного n -угольника.
- Выведите формулу для вычисления площади правильного n -угольника через его периметр и радиус вписанной окружности.
- Как найти радиусы вписанной и описанной окружностей, зная сторону правильного n -угольника? Как выражаются стороны правильного треугольника, квадрата, правильного шестиугольника через радиус описанной окружности?
- Как построить с помощью циркуля и линейки правильный шестиугольник? правильный двенадцатиугольник?
- Что такое число π ?
- По какой формуле вычисляют длину окружности?
- По какой формуле вычисляют площадь круга?
- Что называют круговым сектором? По какой формуле вычисляют его площадь?
- Что называют круговым сегментом? По какой формуле вычисляют его площадь?

3

ГЛАВА

МЕТОД КООРДИНАТ

- ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ
- УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ
- УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ
- КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД

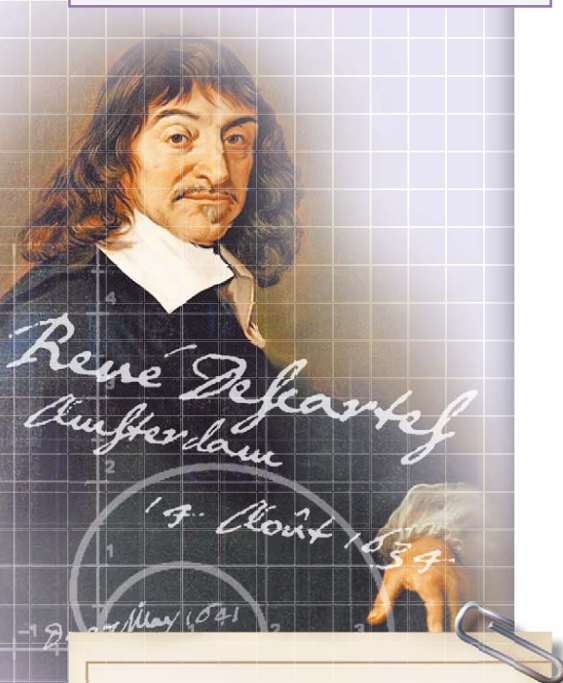
ИНТЕРЕСНО

Основная заслуга в создании современного метода координат принадлежит французскому математику Рене Декарту. В июне 1637 года вышло в свет его сочинение «Рассуждение о методе». Одна из частей этого труда называлась «Геометрия», которая стала поворотным пунктом в развитии новой математики и долгое время была настольной книгой крупнейших математиков XVII в. Главной её ценностью было изложение нового раздела математики — аналитической геометрии, которая позволяла с помощью системы координат перевести геометрические задачи на алгебраический язык и тем самым существенно упрощала их исследование и решение. Кроме того, Декарт использовал в «Геометрии» удобную математическую символику, которая с этого момента стала общепринятой в математике. До наших дней дошла история, которая подтолкнула Декарта к открытию. Посещая парижские театры, он удивлялся путанице, вызываемой отсутствием элементарного порядка распределения публики в зрительном зале. Предложенная им система нумерации, в которой каждое место получало номер ряда и порядковый номер от края, сразу же внесла ясность. Этим методом распределения мест мы пользуемся до сих пор.

3.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют декартовой системой координат
- По какой формуле можно найти координаты середины отрезка
- По какой формуле можно вычислить расстояние между двумя точками



Рене Декарт (1596–1650) — французский математик, физик, философ. В одном из разделов своего научного труда «Рассуждение о методе» Декарт заложил основы аналитической геометрии.

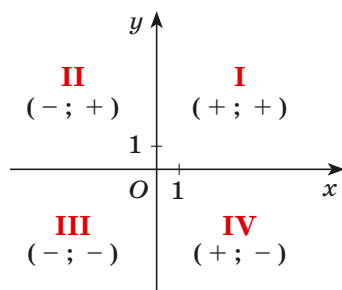


Рис. 3.3

ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Из курса алгебры вам уже известна прямоугольная система координат. Впервые применил её в своих работах французский математик и философ Рене Декарт (1596–1650), потому прямоугольную систему координат и называют декартовой. Вспомним, что же такое декартова система координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ

Рассмотрим две перпендикулярные прямые x и y на плоскости. Обозначим через O точку пересечения этих прямых и будем считать, что каждая из них является числовой осью, или осью координат, с началом в точке O и равными единичными отрезками (рис. 3.1).

Ось x называется осью абсцисс, а ось y — осью ординат. Такая пара перпендикулярных прямых и задаёт на плоскости декартову систему координат. Саму плоскость называют плоскостью xOy или xOy .

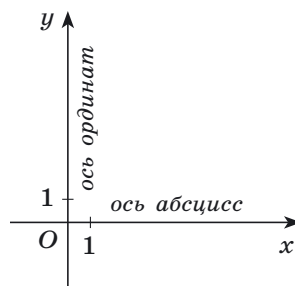


Рис. 3.1

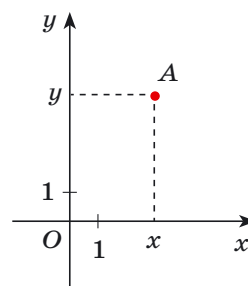


Рис. 3.2

Возьмём на плоскости произвольную точку A (рис. 3.2) и проведём через неё прямые, перпендикулярные осям координат. Одна из них пересечёт ось абсцисс в точке, соответствующей числу x , другая пересечёт ось ординат в точке, соответствующей некоторому числу y .

Число x называют абсциссой точки A , а число y — её ординатой. Числа x и y называют декартовыми координатами точки A , записывают так: $A(x; y)$ — на первом месте абсциссу, на втором ординату.

Оси координат разбивают плоскость на четыре части — четверти I, II, III, IV. В каждой четверти знаки координат сохраняются (рис. 3.3).

Понятно, что точке O соответствуют две нулевые координаты: $O(0; 0)$. Для всех точек оси абсцисс ордината y равна 0, для всех точек оси ординат абсцисса x равна 0.

Введя таким образом координаты на плоскости, мы установили взаимно-однозначное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами чисел, то есть каждой точке плоскости xy соответствует пара чисел, а каждой паре чисел соответствует точка плоскости.

Решим в декартовой системе координат две задачи. Доказанные в этих задачах формулы мы будем использовать далее при решении более сложных задач.

КООРДИНАТЫ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА

ЗАДАЧА 1. Доказать, что каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Доказательство. Пусть дан отрезок AB , где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, точка $C(x; y)$ — середина отрезка AB . Докажем, что

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда отрезок AB не перпендикулярен одной из осей координат, например оси абсцисс, то есть $x_1 \neq x_2$ (рис. 3.4).

Через точки A , B и C проведём прямые, перпендикулярные оси абсцисс. Эти прямые пересекут ось абсцисс в точках $A_1(x_1; 0)$; $C(x; 0)$; $B(x_2; 0)$. По теореме Фалеса точка C_1 будет серединой отрезка A_1B_1 . Тогда $A_1C_1 = B_1C_1$, а значит,

$$|x - x_1| = |x - x_2|. \quad \text{Отсюда}$$

$$\text{либо } x - x_1 = x - x_2, \quad \text{либо} \\ x - x_1 = -(x - x_2).$$

Так как $x_1 \neq x_2$, то первый случай невозможен. Значит, верно второе равенство, откуда получаем формулу

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Если же отрезок AB будет перпендикулярен оси x , тогда у всех трёх точек — A , B и C — будет одна и та же абсцисса, то есть $x = x_1 = x_2$. Формула будет верна и в этом случае.

Аналогично доказывается справедливость равенства

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Докажите его самостоятельно.

Рассмотрим задачу, при решении которой используются полученные формулы.

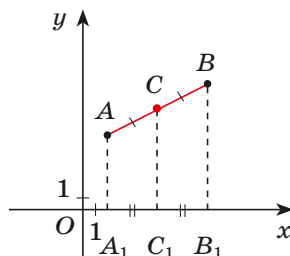


Рис. 3.4





Задача 1. Точка C — середина отрезка AB . Найдите координаты точки A , если $B(m; -4)$; $C(n; -4)$.

Решение. У точек B и C одинаковые ординаты, значит, отрезок AB параллелен оси абсцисс. Тогда ордината точки A равна -4 . Сделаем схематичный рисунок.

$$A(x; -4) \quad \text{-----} \quad \text{-----} \quad B(m; -4) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad C(n; -4)$$

Точка C — середина AB , значит, $n = \frac{x+m}{2}$. Отсюда $x = 2n - m$.

Ответ: $A(2n - m; -4)$.

Задача 2. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-3; 1)$; $B(-1; 6)$; $C(5; 5)$. Найдите координаты четвёртой вершины D и точки M — точки пересечения его диагоналей.

Решение. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. То есть точка M — середина отрезка AC , тогда её координаты:

$$x_0 = \frac{x_A + x_C}{2}; \quad x_0 = \frac{-3 + 5}{2} = 1. \\ y_0 = \frac{y_A + y_C}{2}; \quad y_0 = \frac{1 + 5}{2} = 3.$$

Зная координаты точки пересечения диагоналей, найдём координаты четвёртой вершины D . Так как точка $M(1; 3)$ является также и серединой отрезка BD , имеем:

$$x_0 = \frac{x_B + x_D}{2}; \quad 1 = \frac{-1 + x_D}{2}, \text{ отсюда } x_D = 3. \\ y_0 = \frac{y_B + y_D}{2}; \quad 3 = \frac{6 + y_D}{2}, \text{ отсюда } y_D = 0.$$

Ответ: $D(3; 0)$, $M(1; 3)$.

ФОРМУЛА РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ Вы уже знаете, как находить расстояние между двумя точками координатной прямой. Так, для точек $A(x_1)$ и $B(x_2)$ на рисунке 3.5:

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

А как найти расстояние между двумя любыми точками плоскости? Ответ на этот вопрос получим в следующей задаче.



Рис. 3.5

ЗАДАЧА 2. Доказать, что расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Доказательство. Рассмотрим случай, когда $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, то есть отрезок AB не перпендикулярен ни одной из осей координат и не принадлежит ни одной оси.

Проведём через точки A и B прямые, перпендикулярные осям координат, и обозначим через C — одну из точек их пересечения (рис. 3.6). Получим прямоугольный треугольник ABC , в котором $BC = |x_2 - x_1|$, $AC = |y_2 - y_1|$. Применим теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ABC :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Поэтому формулу расстояния между этими точками можно записать так:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Данная формула верна и в случае, когда отрезок AB перпендикулярен одной из осей координат. Пусть, например, отрезок AB перпендикулярен оси абсцисс, то есть $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, тогда $AB = |y_2 - y_1|$.

Тот же результат получим и по формуле (1):

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|.$$

Заметим, что при $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$ точки A и B совпадают и по формуле (1) получаем $AB = 0$.

Формула расстояния между двумя точками часто используется при решении геометрических задач, например чтобы доказать равенство двух отрезков.



Задача. Докажите, что треугольник ABC , где $A(3; -3)$, $B(6; 4)$, $C(8; -1)$, — прямоугольный и равнобедренный.

Доказательство. Пользуясь формулой расстояния между двумя точками, найдём длины сторон треугольника ABC :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(6 - 3)^2 + (4 + 3)^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}.$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(8 - 6)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}.$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(8 - 3)^2 + (-1 + 3)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}.$$

Так как $BC = AC = \sqrt{29}$, то треугольник ABC — равнобедренный.

Так как $BC^2 + AC^2 = 29 + 29 = 58 = AB^2$, то треугольник ABC — прямоугольный.

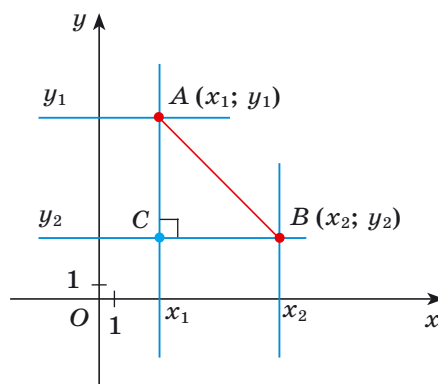


Рис. 3.6

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют декартовой системой координат?
- Как называют координатные прямые на координатной плоскости?
- Объясните, как определяются координаты точек и как они называются.
- Какие знаки у координат точки, если она расположена в первой координатной четверти? во второй? в третьей? в четвёртой?
- Чему равны ординаты точек, лежащих на оси абсцисс? Чему равны абсциссы точек, лежащих на оси ординат?
- Какие координатные прямые пересекает отрезок AB , если:
 - а) $A(-3; 1)$, $B(3; 2)$;
 - б) $A(4; -2)$, $B(-3; 5)$;
 - в) $A(-2; -3)$, $B(1; -8)$?
- Запишите формулу для вычисления координат середины отрезка.
- Известно, что середина отрезка AB лежит на оси абсцисс. Чему равна ордината точки B , если ордината точки A равна -2 ?
- По какой формуле определяют расстояние между двумя точками плоскости?

3.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- В чём суть координатного метода
- Какое уравнение называют уравнением линии
- Уравнение окружности

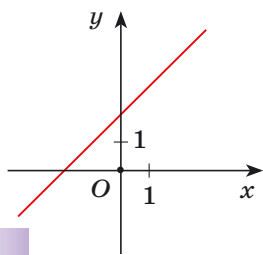


Рис. 3.7

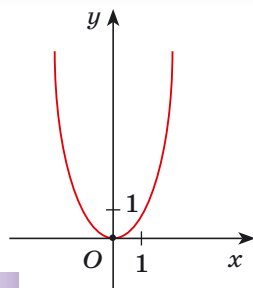


Рис. 3.8

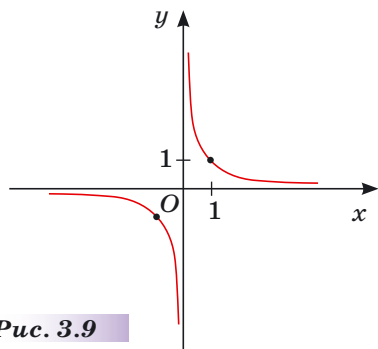


Рис. 3.9

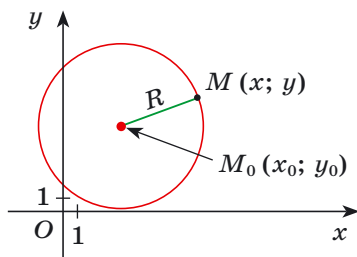


Рис. 3.10

УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

Введение Рене Декартом прямоугольной системы координат произвело настоящий переворот в геометрии. В чём же дело?

МЕТОД КООРДИНАТ Введение системы координат на плоскости позволяет свести многие геометрические задачи к алгебраическим (и наоборот, алгебраические к геометрическим), то есть позволяет изучать геометрические фигуры и их свойства алгебраическими методами, с помощью уравнений и неравенств.

Такой метод изучения геометрических фигур и называют координатным. Можно сказать, что координатный метод — это способ перевода с геометрического языка на язык алгебры, после чего геометрическая задача становится алгебраической.

УРАВНЕНИЕ ФИГУРЫ Чтобы пользоваться координатным методом, нужно выяснить, какое уравнение называют уравнением фигуры.

Вообще почти всякое уравнение с двумя переменными x и y задаёт на координатной плоскости фигуру. Так, например, уравнение $y = x + 2$, как вы знаете, задаёт на координатной плоскости прямую (рис. 3.7); уравнение $y = x^2$ задаёт параболу (рис. 3.8); уравнение $y = \frac{1}{x}$ — гиперболу (рис. 3.9); уравнение $|y| = -(x + 1)^2$, имеющее единственное решение $(-1; 0)$, задаёт на плоскости одну только точку $A(-1; 0)$.

Следует иметь в виду, что не всякое уравнение с двумя переменными задаёт на координатной плоскости фигуру. Например, уравнение $x^2 + y^2 = -1$ не имеет решений и задаёт на координатной плоскости пустое множество.

Так какое же уравнение является уравнением фигуры?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнением фигуры в прямоугольной системе координат называют равенство с двумя переменными $(x; y)$, если:

- 1) координаты любой точки $M(x; y)$ фигуры являются решением данного уравнения;
- 2) любое решение уравнения является координатами точки, принадлежащей данной фигуре.

При изучении геометрических фигур методом координат возникают две задачи.

Задача 1. По заданному уравнению построить соответствующую фигуру и исследовать её геометрические свойства. С такими задачами, например, вы имеете дело на уроках алгебры при построении графиков функций.

Задача 2. По геометрическим свойствам данной фигуры найти уравнение, задающее эту фигуру на плоскости.

УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ В заданной системе координат выведем уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ и радиусом, равным R .

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка данной окружности (рис. 3.10). Тогда $M_0M = R$.

Пользуясь формулой расстояния между двумя точками, получим

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

или

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (1)$$

Если точка M лежит на окружности, то $M_0M = R$, то есть $M_0M^2 = R^2$. Значит, координаты точки M в этом случае являются решением уравнения (1).

Покажем теперь, что любое решение уравнения $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где $R > 0$, является координатами точки, принадлежащей данной окружности.

Пусть $(x_1; y_1)$ — произвольное решение уравнения (1).

Тогда $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2$. Отсюда

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = R.$$

Это равенство показывает, что точка $A(x_1; y_1)$ удалена от центра окружности $M(x_0; y_0)$ на расстояние, равное радиусу, а значит, точка $A(x_1; y_1)$ принадлежит данной окружности.

Таким образом, мы доказали, что в прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Если центром окружности является начало координат, точка $O(0; 0)$ (рис. 3.11), то уравнение окружности принимает вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Замечание. Важно уметь увидеть уравнение окружности и в том случае, когда оно задано в неявном, то есть нестандартном, виде.

Для примера возьмём уравнение

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0.$$

Преобразуем его, выделив полные квадраты двучленов относительно x и y (с такими преобразованиями вы уже встречались в курсе алгебры):

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 3 = 0, \text{ то есть}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2.$$

Таким образом, уравнение $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ является уравнением окружности с центром в точке $M_0(-1; 2)$ и радиусом $R = \sqrt{2}$.

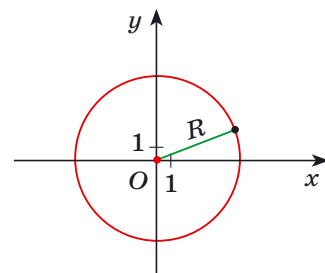


Рис. 3.11

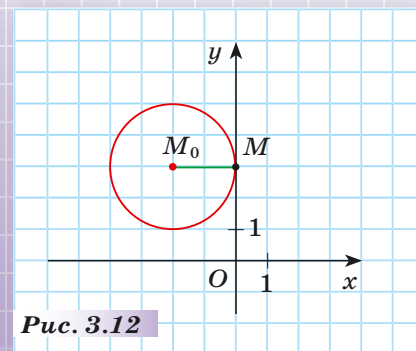


Рис. 3.12

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- В чём суть координатного метода?
- Какое уравнение называют уравнением линии?
- Какие две задачи позволяет решить координатный метод?
- Какой вид имеет уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ и радиусом R ?
- Какой вид имеет уравнение окружности с центром в начале координат?
- Запишите уравнение окружности, изображённой на рисунке 3.12.
- Назовите центр и радиус окружности, заданной уравнением:
 - а) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 7$;
 - б) $x^2 + y^2 = 9$;
 - в) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$.
- Центром окружности радиуса R является начало координат. Сколько точек пересечения с осями координат имеет окружность?
- Окружность задана уравнением $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Пересекает ли данная окружность ось абсцисс? ось ординат?

3.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Уравнение прямой
- Геометрический смысл коэффициентов уравнения прямой

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Из курса алгебры вам известно, что уравнение вида $y = kx + b$ является уравнением прямой. В этом пункте мы получим общее уравнение прямой.

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ НАЧАЛО КООРДИНАТ

Сначала выведем уравнение прямой, проходящей через начало координат.

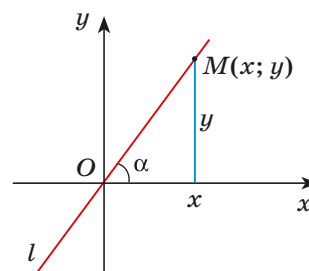


Рис. 3.13

Обозначим угол, который образует прямая l с положительной полуосью абсцисс через α (рис. 3.13).

Угол α может принимать значения от 0 до 180° . Отсюда исключим случай, когда $\alpha = 90^\circ$, его рассмотрим отдельно.

Обозначим $\operatorname{tg} \alpha = k$. Так как k зависит от величины угла α , то k называют угловым коэффициентом прямой. Тогда:

$k > 0$, если прямая проходит в I и III четвертях;

$k < 0$, если прямая проходит в II и IV четвертях.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка прямой l . Тогда:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \text{то есть } k = \frac{y}{x}, \quad \text{отсюда}$$

$$y = kx.$$

Полученное равенство является уравнением прямой, проходящей через начало координат.

В таком виде можно записать уравнение любой прямой, проходящей через начало координат, кроме прямой, перпендикулярной оси абсцисс (так как тангенс угла 90° не определён), то есть оси ординат.

Найдём уравнение оси ординат.

Так как все абсциссы точек оси ординат равны 0 , то ось ординат имеет уравнение $x = 0$.

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ Рассмотрим произвольную прямую l , не перпендикулярную оси абсцисс и не проходящую через начало координат. На рисунке 3.14 прямая l пересекает ось ординат в точке $B(0; b)$.

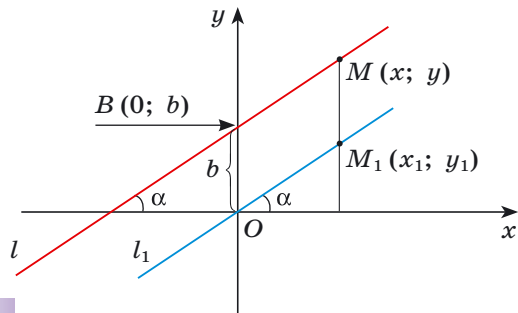


Рис. 3.14

Проведём через начало координат прямую l_1 , параллельную прямой l .

Так как $l_1 \parallel l$, то углы, образованные этими прямыми и секущей осью Ox , равны как соответственные. Тогда будут равны и угловые коэффициенты k этих прямых.

Поэтому уравнение прямой l_1 имеет вид

$$y_1 = kx. \quad (1)$$

Рассмотрим точку $B(0; b)$. Ордината b получается из ординаты точки $O(0; 0)$ прибавлением b .

Рассмотрим точки с одинаковой абсциссой $M(x; y)$ и $M_1(x; y_1)$, лежащие на прямых l и l_1 соответственно.

Так как $OBMM_1$ — параллелограмм, то $MM_1 = OB$, то есть ордината точки M также получается из ординаты точки M_1 прибавлением b , то есть

$$y = y_1 + b.$$

Таким образом, учитывая уравнение (1), уравнение прямой с угловым коэффициентом k имеет вид

$$y = kx + b.$$

Исключение составляет случай, когда прямая перпендикулярна оси абсцисс (рис. 3.15).

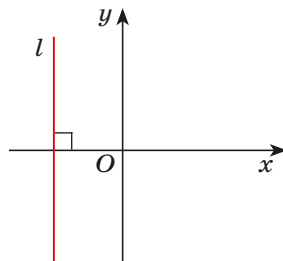
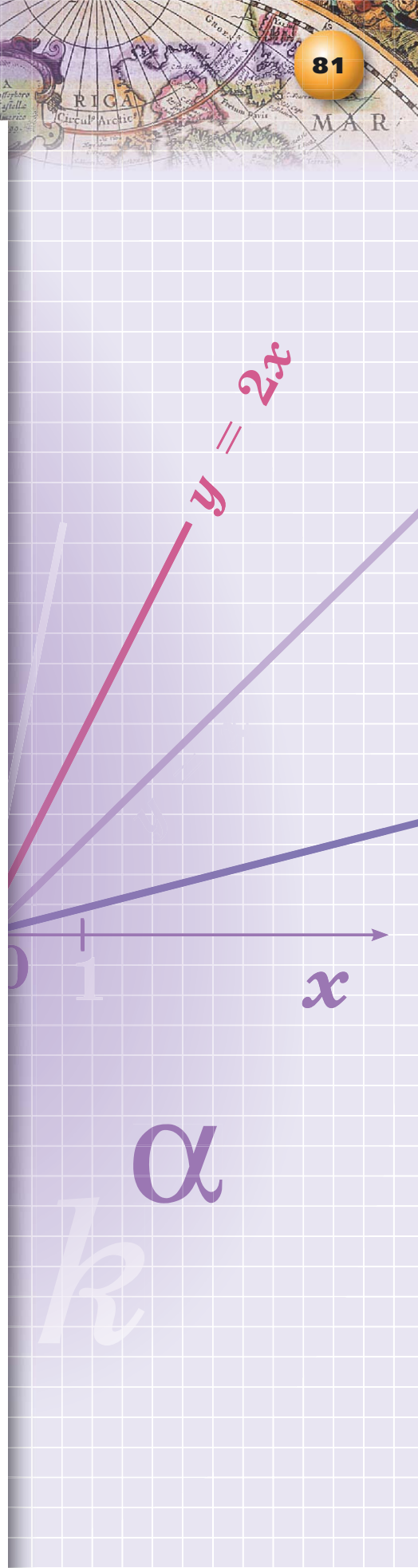


Рис. 3.15

Если прямая перпендикулярна оси абсцисс, то все её точки имеют одну и ту же абсциссу a и уравнение прямой имеет вид

$$x = a.$$

С уравнениями вида $y = kx$ и $y = kx + b$ вы уже встречались в курсе алгебры при изучении линейной функции.



Параллельные прямые (не перпендикулярные оси абсцисс) имеют одинаковые угловые коэффициенты. И наоборот, если прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты, то они параллельны.

Обратим внимание на геометрический смысл коэффициентов k и b , входящих в уравнение прямой.



В уравнении прямой $y = kx + b$ угловой коэффициент прямой k равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси абсцисс, b — ордината точки пересечения данной прямой с осью ординат.

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ Общее уравнение прямой имеет вид

$$Ax + By + C = 0,$$

в котором A и B не равны нулю одновременно.

Приведём это уравнение к виду $y = kx + b$.

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначив $k = -\frac{A}{B}$ и $b = -\frac{C}{B}$, получим $y = kx + b$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Как видим, это можно сделать, если $B \neq 0$. Если же $B = 0$, то получаем уравнение $x = -\frac{C}{A}$ — уравнение прямой, перпендикулярной оси абсцисс.

Мы знаем, что через две точки проходит единственная прямая, то есть две точки однозначно задают прямую.

Рассмотрим на примерах, как, зная координаты двух точек, получить уравнение прямой.



Задача 1. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $B(1; -1)$ и $A(2; 1)$.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$.

Для того чтобы написать уравнение прямой AB , нужно получить значения k и b , задающие прямую AB .

Так как точки $A(2; 1)$ и $B(1; -1)$ принадлежат прямой AB , то их координаты удовлетворяют уравнению $y = kx + b$.

Подставив вместо x и y координаты точек A и B в это уравнение, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = 2k + b \\ -1 = k + b. \end{cases}$$



Продолжение задачи 1

Решив систему уравнений, получим

$$k = 2; b = -3.$$

Тогда уравнение прямой AB имеет вид

$$y = 2x - 3.$$

Запишем уравнение прямой AB в общем виде:

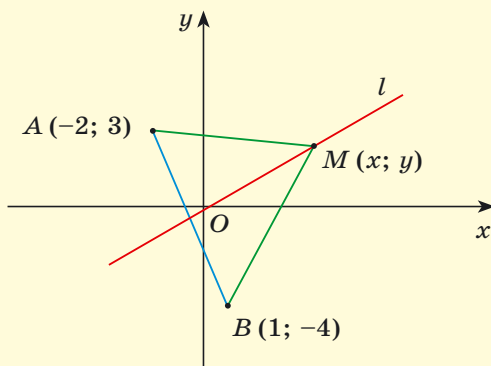
$$2x - y - 3 = 0.$$

Ответ: $2x - y - 3 = 0$.

Задача 2. Найдите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB , если $A(-2; 3)$, $B(1; -4)$.

Решение. Пусть прямая l — серединный перпендикуляр к отрезку AB .

Серединный перпендикуляр к отрезку AB является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка AB .



Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка прямой l .

Тогда $AM = BM$.

Применив формулу расстояния между двумя точками, получим:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2}.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат и приведём подобные слагаемые:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = (x-1)^2 + (y+4)^2;$$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = \\ = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16; \end{aligned}$$

$$4x + 2x - 6y - 8y + 4 + 9 - 1 - 16 = 0;$$

$$6x - 14y - 4 = 0 \quad | : 2$$

$$3x - 7y - 2 = 0 \quad \text{—}$$

искмое уравнение серединного перпендикуляра.

Ответ: $3x - 7y - 2 = 0$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какой вид имеет уравнение прямой, проходящей через начало координат в плоскости xy ?
- Что называют угловым коэффициентом прямой? Каков его геометрический смысл?
- Какой вид имеет уравнение прямой с угловым коэффициентом?
- Как записывают уравнение прямой в общем виде?
- Какой геометрический смысл коэффициента b в уравнении прямой?
- Запишите уравнение прямой, параллельной оси ординат, проходящей через точку $A(3; -2)$.
- Среди прямых $y = 3x$, $y - 3x + 2 = 0$, $3x + y + 5 = 0$; $2 - 3x = 0$; $y + 5 = 0$ выберите прямые, параллельные:
 - 1) друг другу;
 - 2) оси ординат;
 - 3) оси абсцисс.
- Какие значения принимают коэффициенты A , B и C в общем уравнении прямой, если известно, что прямая l параллельна оси абсцисс?

3.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

● Примеры применения метода координат при решении задач

КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД

Метод координат является одним из самых универсальных методов. Для того чтобы им воспользоваться, нужно ввести систему координат и записать условие задачи в координатах.

ВЫБОР СИСТЕМЫ КООРДИНАТ Пожалуй, самым главным этапом решения геометрической задачи координатным методом является удобный выбор системы координат, так как успех в решении во многом зависит именно от выбора системы координат.

Есть геометрические фигуры, своим видом подсказывающие выбор системы координат: прямоугольник, ромб, квадрат, окружность... (рис. 3.16, $a—d$).

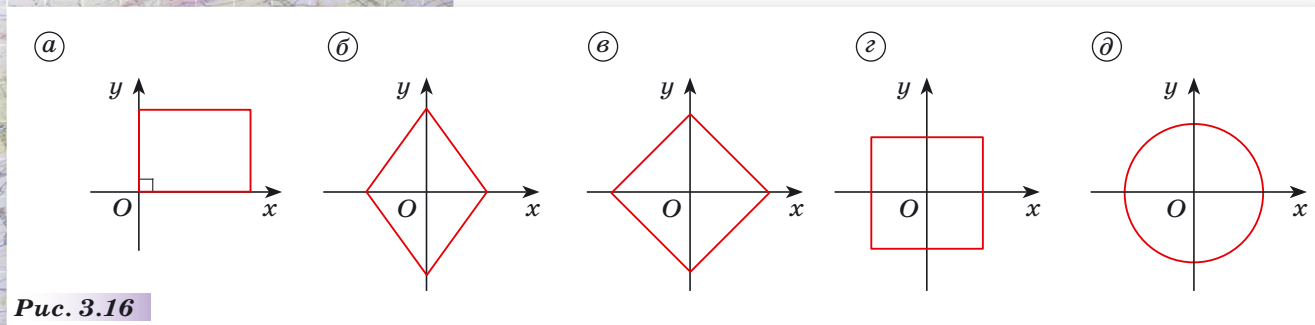


Рис. 3.16

Разберём несколько задач, иллюстрирующих применение координатного метода.

ЗАДАЧА 1. Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для произвольной точки M плоскости справедливо равенство

$$AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2.$$

Решение. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ $AB = a$, $AD = b$.

Введём систему координат таким образом, чтобы вершина A находилась в начале координат — точке O , а сторона AD принадлежала положительно направленной полуоси Ox (рис. 3.17).

Тогда точка A будет иметь координаты $(0; 0)$, точка D — координаты $(b; 0)$.

В выбранной системе координат легко установить координаты вершин B и C прямоугольника $ABCD$: $B(0; a)$, $C(b; a)$.

Возьмём произвольную точку $M(x; y)$ и выразим квадраты расстояний от точки M до вершин прямоугольника:

$$AM^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = x^2 + y^2.$$

$$BM^2 = x^2 + (y - a)^2.$$

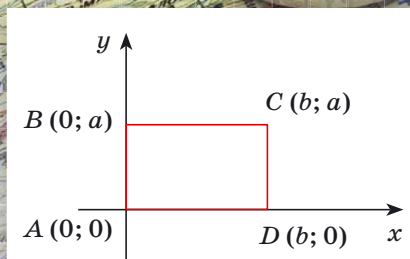


Рис. 3.17

$$CM^2 = (x - b)^2 + (y - a)^2.$$

$$DM^2 = (x - b)^2 + y^2.$$

Найдём суммы $AM^2 + CM^2$ и $BM^2 + DM^2$:

$$\begin{aligned} AM^2 + CM^2 &= x^2 + y^2 + (x - b)^2 + (y - a)^2 = \\ &= x^2 + y^2 + x^2 - 2bx + b^2 + y^2 - 2ay + a^2 = \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 2bx - 2ay + a^2 + b^2. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} BM^2 + DM^2 &= x^2 + y^2 - 2ay + a^2 + x^2 - 2bx + b^2 + \\ &+ y^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2bx - 2ay + a^2 + b^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2.$$

ЗАДАЧА 2. Около единичной окружности описан квадрат. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин квадрата.

Решение. Введём систему координат таким образом, чтобы центр окружности располагался в начале координат, а стороны квадрата были параллельны осям координат (рис. 3.18).

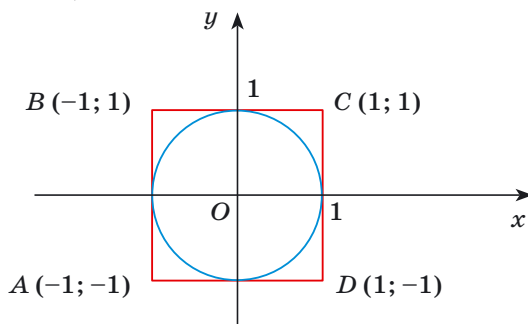


Рис. 3.18

Тогда вершины квадрата будут иметь координаты: $A(-1; -1)$, $B(-1; 1)$, $C(1; 1)$, $D(1; -1)$.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка окружности, тогда

$$AM^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2.$$

$$BM^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2.$$

$$CM^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2.$$

$$DM^2 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2.$$

Сложив почленно равенства и раскрыв скобки, получим

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4x^2 + 4y^2 + 8 = 4(x^2 + y^2) + 8.$$

Учитывая, что координаты точки M удовлетворяют уравнению окружности $x^2 + y^2 = 1$, получим:

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 12.$$

Ответ: 12.

Замечание. Систему координат можно было выбрать и так, чтобы вершины квадрата принадлежали осям координат.

Рассмотрите этот вариант самостоятельно.



Метод координат особенно эффективен в тех случаях, когда требуется найти фигуру, все точки которой обладают некоторым свойством, то есть когда требуется найти геометрическое место точек.

ЗАДАЧА 3. Длина отрезка AB равна 2. Найти геометрическое место точек M плоскости таких, для которых

$$AM^2 + BM^2 = 4.$$

Решение. Введём прямоугольную систему координат таким образом, чтобы начало координат совпало с серединой отрезка AB , а сам отрезок принадлежал оси Ox (рис. 3.19).

Тогда точка A будет иметь координаты $(-1; 0)$, точка B — $(1; 0)$.

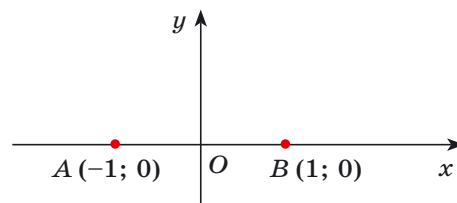


Рис. 3.19

Пусть точка M имеет координаты $(x; y)$. Тогда:

$$AM^2 = (x + 1)^2 + y^2;$$

$$BM^2 = (x - 1)^2 + y^2.$$

Так как

$$AM^2 + BM^2 = 4, \quad (1)$$

получим уравнение:

$$(x + 1)^2 + y^2 + (x - 1)^2 + y^2 = 4; \quad (2)$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4;$$

$$2x^2 + 2y^2 = 2;$$

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (3)$$

А это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 1.

Покажем теперь, что координаты любой точки M окружности удовлетворяют условию задачи.

Если $M(x; y)$ — точка окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, то её координаты удовлетворяют уравнению, то есть $x^2 + y^2 = 1$, то есть получили равенство (3) — отсюда верно равенство (2), а значит, и (1).

Центр окружности O — середина отрезка AB .

Таким образом, геометрическое место точек M таких, что $AM^2 + BM^2 = 4$, является окружностью с центром в середине отрезка AB и радиусом, равным 1.

ЗАДАЧА 4. Даны точки A и B . Докажите, что геометрическим местом точек M таких, что $AM : BM = 2$, является окружность с центром на прямой AB .

Решение. Введём систему координат таким образом, чтобы точки A и B лежали на оси абсцисс, а начало координат находилось в середине отрезка AB (рис. 3.20).

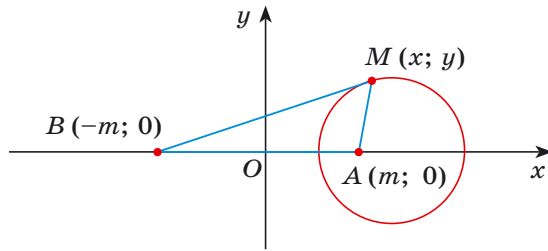


Рис. 3.20

Пусть точка A имеет координаты $(m; 0)$, тогда точка B будет иметь координаты $(-m; 0)$. Координаты точки M , принадлежащей искомому геометрическому месту точек, обозначим $(x; y)$.

По формуле расстояний между двумя точками имеем:

$$\begin{aligned} AM^2 &= (x - m)^2 + y^2, \\ BM^2 &= (x + m)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Так как $AM : BM = 2$, то

$$AM = 2BM \text{ и } AM^2 = 4BM^2$$

или

$$\begin{aligned} (x - m)^2 + y^2 &= 4((x + m)^2 + y^2); \\ x^2 - 2mx + m^2 + y^2 &= 4x^2 + 8mx + 4m^2 + 4y^2; \\ 3x^2 + 10mx + 3m^2 + 3y^2 &= 0 \quad | : 3; \\ x^2 + \frac{10m}{3}x + m^2 + y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Выделив полный квадрат относительно переменной x , получим:

$$\left(x + \frac{5m}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16m^2}{9} \quad (1)$$

уравнение окружности с центром в точке $\left(-\frac{5m}{3}; 0\right)$ и радиусом, равным $\frac{4}{3}m$.

Значит, если точка $M(x; y)$ принадлежит этой окружности, то её координаты удовлетворяют уравнению (1).

Пусть $(x_1; y_1)$ — некоторое решение уравнения (1). Тогда, проделав обратные операции, получим, что

$$(x_1 - m)^2 + y_1^2 = 4((x_1 + m)^2 + y_1^2),$$

то есть точка $M_1(x_1; y_1)$ такова, что $AM_1^2 = 4BM_1^2$, а тогда $AM_1 = 2BM_1$.

Следовательно, точка M_1 принадлежит этой окружности. Таким образом, искомое геометрическое место точек — окружность с центром в точке с координатами $\left(-\frac{5m}{3}; 0\right)$ и радиусом, равным $\frac{4}{3}m$.

Если мы вместо числа 2 возьмём любое положительное число $k \neq 1$, мы всё равно получим уравнение некоторой окружности. Такие окружности называют *окружностями Аполлония* — в честь древнегреческого математика и астронома.



Аполлоний Пергский, живший в III—II веках до н. э., был одним из величайших математиков и выдающимся астрономом. Самое известное произведение Аполлония Пергского — «Конические сечения», где впервые представлено полное и систематическое учение о кривых второго порядка, образующихся при сечении конуса плоскостью. Именно Аполлоний ввёл термины «парабола», «гипербола», «эллипс». Теория конических сечений — одно из величайших достижений греческой математики. На неё опирались в своих трудах и Галилей, и Кеплер, и Ферма, и Декарт, и Ньютон, и Эйлер, и многие другие великие учёные.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Опишите этапы координатного метода решения геометрических задач.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

П. 3.1

К Т 1

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Постройте прямоугольную систему координат.
2. Проведите прямую, параллельную оси абсцисс. Отметьте на этой прямой три точки и запишите их координаты. Что можно сказать про ординаты точек этой прямой?
3. Проведите прямую, перпендикулярную оси абсцисс. Что можно сказать про координаты точек этой прямой?
4. а) Из точки $M(2; 5)$ опустили перпендикуляр на ось ординат. Запишите координаты основания перпендикуляра. б) Запишите координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки M на ось абсцисс.
5. Найдите, чему равно расстояние от точки $N(-3; 4)$ до: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.
6. В прямоугольной системе координат заштрихуйте область, у всех точек которой абсциссы отрицательны, а ординаты положительны.
7. а) Какие оси пересекает отрезок AB , если $A(2; -4)$, $B(-3; -2)$? б) Какая из точек $-A(2; 3)$ или $B(-1; 1)$ — ближе к началу координат? в) Докажите, что отрезок AB пересекает ось ординат и не пересекает ось абсцисс, если $A(-5; 4)$, $B(3; 2)$.
8. Определите координаты точки M_1 , симметричной точке $M(2; 5)$ относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.
9. Точки $A(...; 3)$ и $A_1(-4; ...)$ симметричны относительно оси ординат. Восстановите их координаты.
10. Запишите неравенство, которому удовлетворяют координаты точек третьего координатного угла.
11. Найдите геометрическое место точек координатной плоскости таких, что: а) $x \leq 0$; $y \leq 0$; б) $x > 0$; $y \leq 0$; в) $x = y$; г) $|x| = 3$; д) $x = -4$; $y = 3$; е) $x = 3$; ж) $y = -x$; з) $|y| \leq 2$.

К Т 2

Найдите координаты середины отрезка AB , если:

- а) $A(3; 1)$, $B(7; 1)$; б) $A(3; -1)$, $B(-2; -5)$;
в) $A(-3; 2)$, $B(-3; -4)$; г) $A(0; 5)$, $B(-4; 3)$.

К Т 3

Точка M — середина отрезка AB . Найдите координаты второго конца отрезка, если: а) $M(-1; 2)$, $B(0; 1)$; б) $A(2; -5)$, $M(-3; 1)$; в) $M(0; 3)$, $A(2; 2)$.

К Т 4

Найдите расстояние между точками A и B , если: а) $A(4; -3)$, $B(-1; -7)$; б) $A(5; 0)$, $B(1; -3)$; в) $A(5; 1)$, $B(3; 1)$; г) $A(-4; 3)$, $B(2; -5)$.

К 5

Найдите неизвестную координату x , если:

- а) расстояние между точками $A(2; 3)$ и $B(x; 0)$ равно 5;
б) расстояние между точками $A(x; 3)$ и $B(-1; 2)$ равно 1.

К 6

а) Найдите периметр треугольника ABC , если $A(1; -2)$, $B(-2; -6)$, $C(-5; -2)$.
б) Докажите, что в треугольнике ABC два угла равны, если $A(5; 9)$, $B(6; 2)$, $C(-1; 3)$.

К Т 7

а) Треугольник ABC задан своими вершинами: $A(0; 3)$, $B(0; 1)$, $C(\sqrt{3}; 2)$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.
б) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если $A(2; -10)$, $B(-13; -18)$, $C(-6; 5)$.

8 Докажите, что точки $M(1; 2)$, $N(-2; 6)$ и $P(4; -2)$ лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими?

К 9 а) Докажите, что четырёхугольник с вершинами в точках $A(1; 1)$, $B(-2; 5)$, $C(-1; 2)$, $D(2; -2)$ является параллелограммом. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

б) Докажите, что четырёхугольник с вершинами в точках $A(-1; 2)$, $B(2; 3)$, $C(3; 6)$, $D(0; 5)$ — ромб.

К 10 а) Докажите, что четырёхугольник с вершинами в точках $A(2; 1)$, $B(4; -1)$, $C(1; -4)$, $D(-1; -2)$ — прямоугольник.

б) Докажите, что четырёхугольник с вершинами в точках $A(2; -6)$, $B(8; 2)$, $C(0; 8)$, $D(-6; 0)$ — квадрат.

К Т 11 а) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $M(-2; -1)$. Найдите координаты вершин A и B параллелограмма, если $C(0; 0)$, $D(3; 0)$.

б) В ромбе $ABCD$: $\angle BAD = 30^\circ$, $A(0; 0)$, $D(12; 0)$, ордината точки B отрицательна. Найдите координаты вершин B и C .

К 12 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**

1. Известны координаты трёх вершин параллелограмма. Как найти координаты его четвёртой вершины?

2. Известны координаты четырёх точек. Как проверить, являются ли они вершинами: а) параллелограмма? б) ромба? в) прямоугольника? г) квадрата? д) равнобедренной трапеции?

3. Известны координаты вершин четырёхугольника. Как вычислить его площадь? Приведите примеры.

13 а) Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(1; 0)$, $B(2; 3)$, $C(3; 2)$. Найдите координаты четвёртой вершины параллелограмма $ABCD$.

б) Найдите координаты четвёртой вершины параллелограмма $ABCD$, если $A(5; -1)$, $B(4; -4)$, $C(1; -5)$.

К 14 а) На оси абсцисс найдите точку, равноудалённую от точек $M(1; 1)$ и $N(-2; -4)$.

б) На оси ординат найдите точку, равноудалённую от точек $A(-1; -4)$ и $B(3; 2)$.

15 Найдите координаты точки, равноудалённой от осей координат и от точки $(3; 6)$.

16 Найдите периметр треугольника, образованного средними линиями треугольника AOC , если $A(0; 2)$, $O(0; 0)$, $C(-4; 0)$.

17 а) Докажите, что треугольник с вершинами в точках $A(1; -4)$, $B(-2; -7)$, $C(-1; -2)$ — прямоугольный, и найдите радиус описанной около него окружности. б) Докажите, что треугольник с вершинами в точках $A(4; 1)$, $B(6; 2)$, $C(8; -2)$ — прямоугольный, и укажите его катеты.

18 а) Найдите координаты вершины A равностороннего треугольника ABC , если $B(-2; 3)$, $C(2; -3)$. б) Найдите координаты вершины M равностороннего треугольника MNP , если $N(0; 2)$, $P(0; 6)$.

19 а) Найдите площадь и периметр треугольника, образованного средними линиями треугольника ABC , если $A(1; -3)$, $B(-4; 2)$, $C(-2; -4)$. Решите задачу несколькими способами.

б) Найдите периметр и площадь треугольника, серединами сторон которого являются точки $M(-1; 1)$, $N(-1; -2)$, $P(3; 1)$. Определите его вид.

- 20 а) Докажите, что точка C , делящая отрезок с концами $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ в отношении $AC : CB = m : n$, имеет координаты $x_C = \frac{nx_A + mx_B}{m + n}$; $y_C = \frac{ny_A + my_B}{m + n}$.
- б) Найдите координаты точки C , делящей отрезок AB в отношении $2 : 3$, если $A(3; 15)$, $B(-13; 0)$.
- 21 Вершинами треугольника являются точки $A(5; -1)$, $B(1; 5)$, $C(-3; 1)$. Найдите длины медиан этого треугольника и координаты их точки пересечения.
- 22 Найдите координаты двух точек, которые делят отрезок с концами $A(2; -3)$ и $B(8; 9)$ на три равные части.
- 23 Пятиугольник $ABCDE$ задан координатами своих вершин: $A(1; 1)$, $B(-1; 2)$, $C(3; 2)$, $D(3; -1)$, $E(-1; -2)$. Найдите: а) самую длинную его сторону; б) самую короткую его сторону; в) самую короткую его диагональ; г) самую длинную его диагональ; д) его площадь; е) его углы.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

- а) Периметр равностороннего треугольника равен 18. Найдите его медиану.
- б) Сторона равностороннего треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите его биссектрису.
- а) Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.
- б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза равна 13, а один из катетов равен 5.
- а) В окружность радиуса 6,5 вписан прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 12 см. Найдите площадь этого треугольника.
- б) В окружность радиуса 5 см вписан прямоугольный треугольник, один из его катетов равен 6 см. Найдите площадь этого треугольника.
- Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проведены биссектриса и медиана, образующие угол 15° . Найдите катеты треугольника, если гипотенуза равна 12.
- а) Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 8 и 12, а меньший угол равен 45° .
- б) Основания трапеции равны 5 и 11, боковая сторона, равная 4, образует угол 150° с одним из оснований трапеции. Чему равна площадь трапеции?
- Биссектрисы двух углов трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , принадлежащей основанию AD . Докажите, что точка M равноудалена от боковых сторон и другого основания трапеции.
- а) В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 22$, $BC = 8$, $CD = 10$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.
- б) Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 28, две его стороны равны 9 и 6. Найдите меньшую из оставшихся сторон.

П. 3.2

- 24 На координатной плоскости изобразите фигуру, заданную уравнением:
а) $x = 2$; б) $y = -1$; в) $x + y = 1$.
- 25 Укажите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением:
а) $x^2 + y^2 = 16$; б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 81$; в) $(x + 2)^2 + y^2 = 5$.

- К 26 На координатной плоскости начертите окружность, заданную уравнением:
 а) $x^2 + y^2 = 4$; б) $(x + 1)^2 + y^2 = 16$;
 в) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$; г) $x^2 + (y - 3)^2 = 4$.

27 Составьте уравнение окружности, если известны координаты её центра M и радиус R : а) $M(-1; 4)$, $R = 3$; б) $M(0; 2)$, $R = \sqrt{5}$; в) $M(-3; -1)$, $R = 0,5$.

28 Используя свойства клетчатой бумаги (размер клетки 1×1), определите координаты центра окружности и её радиус (рис. 1). В каждом случае запишите уравнение окружности.

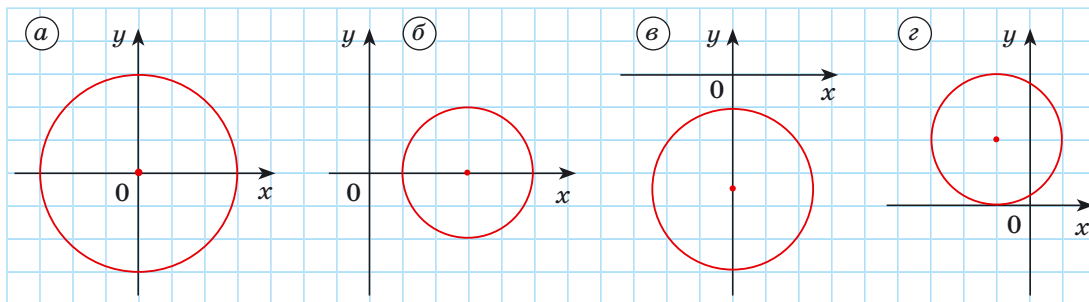


Рис. 1

- К 29 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ** (выполняйте вместе с соседом по парте).

Окружность задана уравнением: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

1. Как узнать, проходит ли окружность через начало координат?
2. Найдите на данной окружности точки с абсциссой, равной 3; -1.
3. Найдите на данной окружности точки с ординатой, равной 9; 7.
4. Укажите, какие из точек $A(8; 1)$, $B(1; 8)$, $C(-4; 3)$, $D(8; 4)$ лежат: а) на окружности; б) вне окружности в) внутри круга, ограниченного окружностью.
5. При каком условии точка $M(x_M; y_M)$: а) будет принадлежать кругу с центром в точке $A(x_0; y_0)$ и радиусом, равным R ; б) не будет принадлежать кругу с центром в точке $A(x_0; y_0)$ и радиусом, равным R ?
6. а) Как доказать, что некоторый отрезок является хордой окружности? б) Докажите, что отрезок DE , где $D(7; 7)$, а $E(-1; 7)$, — хорда данной окружности.
7. а) Как доказать, что отрезок DE с концами в точках $D(x_D; y_D)$ и $E(x_E; y_E)$ является диаметром окружности? б) Докажите, что отрезок OM , где $O(0; 0)$ и $M(6; 8)$, является диаметром окружности.

- Т 30 а) Составьте уравнение окружности с центром в точке $(2; 1)$ и диаметром 5.
 б) Составьте уравнение окружности с центром в точке $(1; -3)$ и диаметром 8.

31 Даны точки $A(3; -4)$ и $B(-1; 3)$. Запишите уравнение окружности:
 а) с центром в точке A и проходящей через точку B ;
 б) с центром в точке B и проходящей через начало координат.

32 Напишите уравнение окружности с диаметром AB , если:
 а) $A(5; -3)$, $B(3; 7)$; б) $A(-4; -3)$, $B(-2; 1)$.

- К 33** а) Составьте уравнение окружности, проходящей через точку $M(1; 3)$, если радиус равен 5, а центр окружности лежит на оси абсцисс. Сколько решений имеет задача?
- б) Окружность, центр которой лежит на оси абсцисс, проходит через точки $M(3; 0)$ и $N(0; -9)$. Запишите уравнение этой окружности.
- 34** а) Как установить, что данное уравнение является уравнением окружности?
- б) Установите, является ли уравнение уравнением окружности:
- 1) $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 29 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 5 = 0$;
 - 3) $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$.
- Т 35** Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 56 = 0$ является уравнением окружности. Укажите координаты её центра и радиус.
- К 36** а) Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и прямой $x = -9$.
- б) Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и прямой $y = 16$.
- К 37** а) Докажите, что четырёхугольник с вершинами в точках $A(-1; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(-5; -2)$ и $D(-5; 2)$ является прямоугольником. Запишите уравнение окружности, описанной около этого прямоугольника.
- К 38** а) Даны точки $A(2; 2)$, $B(1; 3)$, $C(-1; 1)$. Определите вид треугольника ABC и найдите центр и радиус описанной около него окружности.
- б) Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(6; 2)$, $B(3; -7)$, $C(8; -2)$.
- К 39** Найдите координаты точек пересечения двух окружностей, заданных уравнениями $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.
- 40** Окружность задана уравнением $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$. Пересекает ли эта окружность: а) ось абсцисс? б) ось ординат? в) прямую $y = x$?
- 41** В квадрат вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. а) Диагональ параллелограмма образует со сторонами углы 35° и 40° . Найдите углы параллелограмма.
- б) Диагональ прямоугольника образует с одной из сторон угол 28° . Найдите угол между диагоналями прямоугольника.
2. а) Периметр параллелограмма равен 44, а одна из сторон на 6 больше другой. Найдите стороны параллелограмма.
- б) Периметр прямоугольника равен 28, одна из сторон на 2 меньше другой. Найдите диагональ и площадь параллелограмма.
3. а) Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если его диагональ равна 10, а расстояние от вершины B до диагонали AC равно 3.
- б) Сторона квадрата равна 8. На стороне AB отмечена точка M так, что $CM = 10$. Найдите площадь четырёхугольника $AMCD$.
4. а) Стороны параллелограмма равны $5\sqrt{2}$ и 2, один из углов — 45° . Найдите большую диагональ параллелограмма.
- б) Стороны параллелограмма равны 8 и 14, а одна из диагоналей — 18. Найдите другую диагональ параллелограмма.
5. Биссектриса угла прямоугольника делит его диагональ на отрезки 30 см и 60 см. Найдите отрезки, на которые эта биссектриса делит сторону прямоугольника.

П. 3.3

Т 42

Какие из данных уравнений являются уравнениями прямых:

- а) $3x - 4y = 5$, б) $3x = 0$, в) $3x^2 + y = 0$,
г) $3x - 2y = 0$, д) $3x = 2y$, е) $0x + 2y = 0$?

Изобразите эти прямые.

К Т 43

Среди прямых $3x - 4y = 0$; $6x + 3 = 0$; $2x + 2y + 11 = 0$; $8 - 5x = 0$ укажите прямые, которые: а) проходят через начало координат; б) параллельны оси абсцисс; в) параллельны оси ординат.

К 44

Прямая задана уравнением $2x - 5y = 10$.

- а) Определите, принадлежат ли прямой точки $A(5; 0)$, $B(-15; 8)$, $C(10; 4)$.
б) Найдите координаты точек пересечения прямой с осями координат.

К 45

Прямая задана уравнением $3x + 2y = 4$.

- а) Определите, принадлежат ли прямой точки $A(-4; -4)$, $B(2; -1)$, $C(0; -2)$.
б) Найдите координаты точек пересечения прямой с осями координат.

К 46

Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -4)$ перпендикулярно: а) оси Ox ; б) оси Oy .

К 47

Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 1)$ параллельно: а) оси Ox ; б) оси Oy .

К Т 48

Среди прямых, заданных уравнениями, укажите пары параллельных прямых: $x + 2y = 3$; $y = 3 - x$; $2x - y = 3$; $4x - 2y = 7$; $y = -2$; $5 + y = 0$.

К Т 49

Найдите координаты точки пересечения прямых, заданных уравнениями:

- а) $y = 3x - 1$ и $y = x + 2$; б) $4x + 5y + 6 = 0$ и $x + 2y = 0$;
в) $3x + y + 2 = 0$ и $3x + 2y = 1$; г) $4x + 5y + 8 = 0$ и $x - y - 3 = 0$.

К 50

Составьте уравнения прямой, проходящей:

- а) через начало координат и точку $A(3; -2)$;
б) через точки $A(2; 3)$ и $B(3; 2)$;
в) через точки $A(-4; -1)$ и $B(9; -1)$;
г) через точки $A(0; -2)$ и $B(3; 0)$.

К 51

Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $(-3; 2)$ и образующей с осью Ox угол: а) 30° ; б) 45° ; в) 90° ; г) 135° .

К 52

а) Составьте уравнения прямых, содержащих стороны треугольника ABC , если $A(2; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(-1; -1)$. Составьте уравнение прямой, содержащей медиану BM треугольника.

б) Составьте уравнения прямых, содержащих стороны треугольника ABC , если $A(-1; -2)$, $B(5; 8)$, $C(6; 1)$. Составьте уравнение прямой, содержащей медиану AM треугольника.

53

Трапеция $ABCD$ задана координатами своих вершин: $A(2; 2)$, $B(3; -1)$, $C(-7; -7)$, $D(-3; -1)$. Напишите уравнения прямых, содержащих:

- а) основания трапеции; б) боковые стороны трапеции;
в) диагонали трапеции; г) среднюю линию трапеции.

К 54

а) Найдите периметр и площадь треугольника, ограниченного прямой $2x - 3y = 6$ и осями координат.

б) Найдите периметр и площадь треугольника, ограниченного прямой $5x - 4y = 20$ и осями координат.

К Т 55

Чему равны коэффициенты a и b в уравнении прямой $ax + by = 1$, если известно, что прямая проходит через точки $A(1; 2)$; $B(2; 1)$?

К Т 56

Докажите, что прямые $2x - y - 4 = 0$, $x - 3y + 3 = 0$ и $x + y - 5 = 0$ пересекаются в одной точке.

К 57 Найдите точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 1$ с прямой: а) $y = 3x + 1$; б) $y = 2x + 1$; в) $y = kx + 1$. В каждом случае найдите длину хорды, которая образуется при пересечении прямой и окружности.

К 58 Докажите, что прямая $x + y = 3$ является касательной к окружности $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 32$. Найдите координаты точки касания.

59 а) Докажите, что уравнение прямой, пересекающей оси координат в точках $(a; 0)$ и $(0; b)$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$, имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

б) Докажите, что уравнением прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ с угловым коэффициентом k является уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$.

60 ЗАДАЧА ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Прямая задана уравнением $ax + by + c = 0$. Дана точка $A(x_0; y_0)$. Как узнать, в какой полуплоскости, ограниченной этой прямой, лежит данная точка? Приведите пример.

2. Две прямые, заданные своими уравнениями, пересекаются. Дана точка $A(x_0; y_0)$. Как узнать, в каком из углов, образованных этими прямыми, находится точка A ? Приведите пример.

3. Две прямые заданы своими уравнениями. Как найти угол между ними? Приведите пример.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 27 и 24, а угол между ними равен 150° .

2. а) В треугольнике ABC : $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH .

б) В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 30° , $AB = 40$. Найдите BH .

в) В треугольнике ABC : $AC = BC$, высота AN равна 24, угол C равен 30° . Найдите AC .

3. а) Основания трапеции равны 16 и 25. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

б) Средняя линия трапеции равна 11, а меньшее основание равно 6. Найдите большее основание трапеции.

4. а) Найдите площадь треугольника, если его периметр равен 8, а радиус вписанной окружности равен 2.

б) Периметр треугольника равен 28, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите площадь этого треугольника.

5. а) Основание трапеции равно 6, высота равна 11. Найдите неизвестное основание трапеции, если её площадь равна 55.

б) Основания трапеции равны 7 и 12, площадь равна 95. Найдите высоту трапеции.

6. а) Высота, проведённая из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, делит среднюю линию трапеции на отрезки, равные 3 см и 9 см. Найдите основания трапеции.

б) Высота, проведённая из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, делит большее основание трапеции на два отрезка, меньший из которых равен 4, её средняя линия равна 16. Найдите площадь трапеции.

7. а) В равнобедренной трапеции диагональ, являющаяся биссектрисой острого угла, в два раза больше высоты трапеции. Найдите углы трапеции.

б) Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна её боковой стороне и делит пополам её острый угол. Найдите углы трапеции.

8. а) Большее основание равнобедренной трапеции равно 8, меньшее — 6, меньший угол — 60° . Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

б) Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса 8, если известно, что боковая сторона равна 20.

П. 3.4

К Т 61

а) Квадрат со стороной 2 расположен так, что одна его вершина находится в начале координат, ещё одна вершина лежит в третьей координатной четверти, а две стороны принадлежат осям координат. Определите координаты вершин квадрата.

б) Точка пересечения диагоналей ромба, равных 12 и 16, лежит в начале координат, а меньшая диагональ — на оси ординат. Определите координаты вершин ромба.

62

а) Даны две точки A и B . Найдите геометрическое место точек M таких, что $AM^2 - BM^2 = 9$.

б) Даны две точки A и B . Найдите геометрическое место точек M таких, что $AM^2 - BM^2 = 4$.

в) Даны две точки A и B . Найдите геометрическое место точек M таких, что $AM^2 - BM^2 = a^2$, где a — заданное число.

г) Даны две точки A и B . Найдите геометрическое место точек M таких, что $AM^2 + BM^2 = a^2$, где a — заданное число.

К Т 63

В прямоугольной системе координат расположите равносторонний треугольник со стороной, равной 10, так, чтобы одна из сторон лежала на оси Ox , а противоположная ей вершина — на оси Oy . Определите координаты вершин треугольника.

К Т 64

а) Расположите прямоугольник так, чтобы одна его вершина находилась в начале координат, а две стороны, равные 4 и 10, принадлежали осям координат. Укажите координаты вершин прямоугольника и точки пересечения его диагоналей.

б) Расположите прямоугольник так, чтобы точка пересечения его диагоналей находилась в начале координат, а стороны были параллельны координатным осям. Определите координаты вершин прямоугольника, если его диагональ равна 10, а одна из сторон — 6.

К 65

Даны две точки A и B . Найдите геометрическое место точек M таких, что $BM = AM = 2AB$.

К 66

На плоскости заданы точки A и B , причём $AB = 2$. Найдите геометрическое место точек M таких, что $AM^2 + BM^2 = 5$.

К 67

Пользуясь методом координат, докажите следующие теоремы.

а) Диагонали прямоугольника равны.

б) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

в) Диагонали ромба перпендикулярны.

г) Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

д) Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен их полуразности.

е) Сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

К 68

Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место точек M таких, что $(AM^2 + DM^2) - (BM^2 + CM^2) = 2AB^2$.

К 69

Даны точки A и B . Найти геометрическое место точек таких, что медиана к стороне BC в треугольнике ABC равна стороне BC .

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

- а) Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $\sqrt{2}$. Чему равна площадь квадрата?
б) Диагональ квадрата равна 6. Чему равен радиус вписанной в квадрат окружности?
- а) Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 40° . Найдите угол C этого четырёхугольника.
б) Стороны AB , BC , CD и AD четырёхугольника $ABCD$ стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 63° , 62° , 90° , 145° . Найдите угол B этого четырёхугольника.
- а) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 48° , угол CAD равен 38° . Найдите угол ABD .
б) Точки A , B , C , D , расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB , BC , CD и AD , градусные величины которых относятся соответственно как $1:4:12:19$. Найдите угол ABD четырёхугольника $ABCD$.
- Углы A , B и C четырёхугольника $ABCD$ относятся как $1:13:17$. Найдите угол D , если около данного четырёхугольника можно описать окружность.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Объясните, что называют декартовой системой координат.
- Что такое положительная полуось? отрицательная полуось?
- Что называют координатой точки в декартовой системе координат? Как называют координаты точки?
- Докажите, что каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.
- Выведите формулу расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.
- Какое равенство называют уравнением фигуры в прямоугольной системе координат?
- Выведите уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M(x_0; y_0)$. Какой вид принимает уравнение окружности, если её центр находится в начале координат?
- Выведите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
- Запишите уравнение прямой AB , если $A(-2; 3)$, $B(0; -1)$.
- Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через начало координат.
- Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом, не проходящей через начало координат. В чём состоит геометрический смысл коэффициентов этого уравнения?
- В чём состоит метод координат? В чём его достоинства?

4

ГЛАВА

ВЕКТОРЫ

- ВЕКТОР
- КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА
- СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ
- РАЗНОСТЬ ВЕКТОРОВ
- УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО
- РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ДВУМ НЕКОЛЛИНЕАРНЫМ ВЕКТОРАМ
- ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
- СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ
- ПРИМЕНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ИНТЕРЕСНО

Вектор является одним из фундаментальных понятий современной математики. Всеобщее признание векторное исчисление получило в конце XIX в., и связано оно в основном с применением векторов ведущими физиками-теоретиками того времени, прежде всего Максвеллом и Гиббсом. В частности, именно физиками была проработана векторная алгебра в трёхмерном евклидовом пространстве. Сам термин «вектор» впервые появился в 1845 г. у ирландского математика Уильяма Гамильтона. Ему же принадлежат и термины «скаляр», «скалярное произведение», «векторное произведение». Окончательный вид векторное исчисление приняло в трудах американского физика и математика Джозайи Уилларда Гиббса, который в 1901 г. опубликовал учебник по векторному анализу. Значительный вклад в развитие векторного исчисления внесли российские учёные. Так, Михаилом Васильевичем Остроградским была доказана основная теорема векторного анализа. Огромное значение для развития векторного исчисления имели работы А. П. Котельникова, Д. Н. Зейлигера и П. А. Широкова. Большое влияние на развитие векторного исчисления имела книга «Векторный анализ», написанная в 1907 г. П. О. Сомовым.

4.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют вектором
- Какие векторы называют коллинеарными, какие — сонаправленными, какие — противоположно направленными, какие — равными

Многие известные вам величины вполне определяются своими численными значениями при данных единицах измерения: длина, площадь, масса... Такие величины называют **скалярными** или **скалярами**.

ВЕКТОР

Из курса физики вы знаете, что некоторые физические величины, например сила, скорость, перемещение, задаются не только своим числовым значением, но и направлением в пространстве. Такие величины называют векторными или векторами. А что называют векторами в геометрии?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА Рассмотрим отрезок AB . На нём можно указать два направления: от A к B и наоборот — от B к A (рис. 4.1).

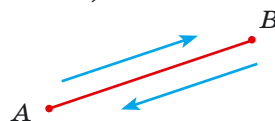


Рис. 4.1

Выберем одно из них, например из A в B . Точку A назовём началом отрезка, а точку B — концом. Тогда отрезок направлен от начала к концу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отрезок, для которого указано, какая точка является началом отрезка, а какая — концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают так: $\overrightarrow{AB}$ (читают: «вектор AB »).

На чертежах направление вектора указывают стрелкой (рис. 4.2).

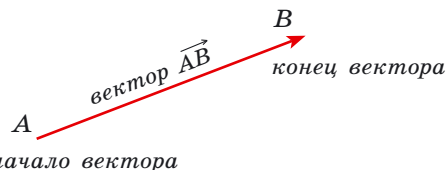


Рис. 4.2

Векторы также обозначают строчными латинскими буквами со стрелкой наверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$...

Ясно, что с каждым отрезком связаны два вектора: $\overrightarrow{AB}$ (A — начало, B — конец) и $\overrightarrow{BA}$ (B — начало, A — конец). Говорят, что вектор $\overrightarrow{BA}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$, и наоборот. Записывают это так: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор называют **нулевым** и обозначают так: $\vec{0}$. Если точка A — начало и конец нулевого вектора, то можно его обозначить так: $\overrightarrow{AA}$. На чертеже нулевой вектор обозначают точкой. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается сам нулевой вектор.

На рис. 4.3 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и нулевой вектор $\vec{0}$.

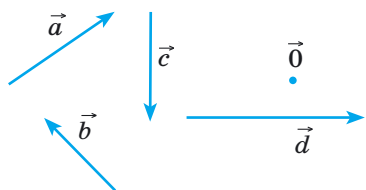


Рис. 4.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Длиной или модулем ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называют длину отрезка AB .

Обозначают это так: $|\overrightarrow{AB}|$.

Длину нулевого вектора считают равной нулю.

Ясно, что длины противоположных векторов равны:

$$|\vec{a}| = |-\vec{a}|.$$

На рисунке 4.4 за единицу измерения принята сторона клетки и $|\overrightarrow{AB}| = 4$; $|\overrightarrow{CD}| = 4$; $|\overrightarrow{MN}| = 3\sqrt{2}$.

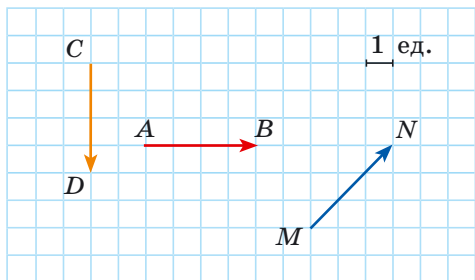


Рис. 4.4

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ненулевые векторы называют **коллинеарными**, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то записывают это так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

На рисунке 4.5 векторы $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$.

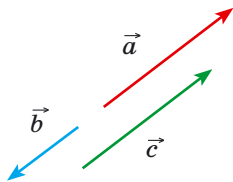


Рис. 4.5

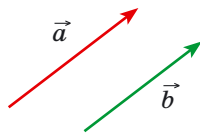


Рис. 4.6

На рисунке 4.6 коллинеарные ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторы, имеющие одинаковое направление, называют **сонаправленными**.

Записывают это так: $\vec{a} \uparrow \vec{b}$.

Сонаправленные ненулевые векторы обладают свойством транзитивности (рис. 4.7):

$$\begin{aligned} \text{если } \vec{a} \uparrow \vec{b} \text{ и } \vec{b} \uparrow \vec{c}, \\ \text{то } \vec{a} \uparrow \vec{c}. \end{aligned}$$

Нулевой вектор считается сонаправленным с любым вектором: $\vec{0} \uparrow \vec{a}$.

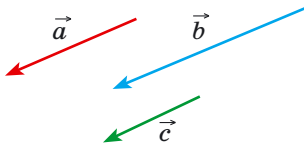


Рис. 4.7

Векторы имеют широкое применение в различных областях человеческих знаний: в математической экономике, химии, биологии, географии и т. д. Например, «Роза ветров», с которой вы знакомились на уроках географии, — это векторная диаграмма, характеризующая режим ветра в данном месте по многолетним наблюдениям. Скорость ветра — величина векторная, поэтому за основу «Розы ветров» и взят вектор. Длины векторов, расходящихся от центра диаграммы, пропорциональны повторяемости ветров этих направлений.

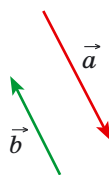


Рис. 4.8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ненулевые коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющие противоположные направления, называют **противоположно направленными**.

Обозначают это так: $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$. (рис. 4.8).

Если сонаправленные векторы не лежат на одной прямой, то они расположены по одну сторону от прямой, проходящей через начала векторов (рис. 4.9, а); если противоположно направленные векторы не лежат на одной прямой, то они расположены по разные стороны от прямой, проходящей через начала векторов (рис. 4.9, б).

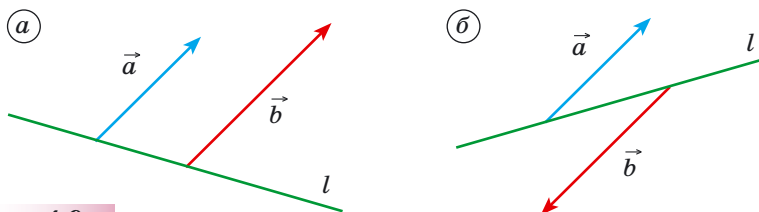


Рис. 4.9

РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два ненулевых вектора называют **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

Все нулевые векторы равны друг другу.

На рисунке 4.10 изображены равные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Записывают это равенство так: $\vec{a} = \vec{b}$.

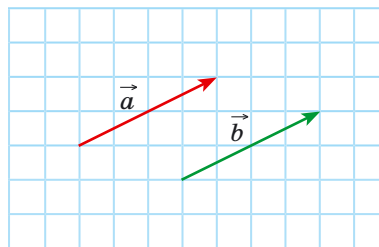


Рис. 4.10

Равенство векторов обладает свойством транзитивности:

если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

ОТКЛАДЫВАНИЕ ВЕКТОРА ОТ ДАННОЙ ТОЧКИ

Если точка M является началом вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ отложен от точки M (рис. 4.11).

Покажем, что от любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$.

Если $\vec{a}$ — нулевой вектор, то искомым будет вектор $\overrightarrow{MM}$.

Пусть $\vec{a}$ — ненулевой вектор, точка A — его начало, точка B — конец вектора. Проведём через точку M

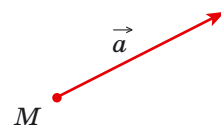


Рис. 4.11

прямую l , параллельную AB (если точка M принадлежит прямой AB , то возьмём саму прямую AB) (рис. 4.12).

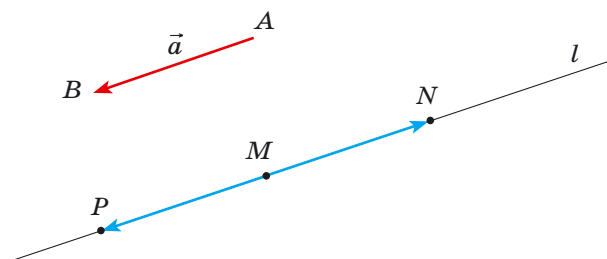


Рис. 4.12

На прямой l существуют две точки N и P такие, что $MN = MP = |\vec{a}|$. Выберем из векторов $\vec{MN}$ и $\vec{MP}$ тот, который сонаправлен с вектором $\vec{a}$. На рисунке 4.12 это вектор $\vec{MP}$.

Вектор $\vec{MP}$ — искомый. Действительно, $\vec{MP} \uparrow \vec{a}$ и $|\vec{MP}| = |\vec{a}|$.

Из построения следует, что

от данной точки можно отложить только один вектор, равный данному.

Замечание. Равные векторы, отложенные от разных точек, иногда обозначают одной и той же буквой и говорят, что это один и тот же вектор, отложенный от разных точек.



Задача. Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ коллинеарны и $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

Решение. Векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ коллинеарны, значит, стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ параллельны.

В таком случае четырёхугольник $ABCD$ либо параллелограмм, либо трапеция.

Известно также, что $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$, значит, диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ равны.

Если четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм и у него равны диагонали, то он — прямоугольник.

Если четырёхугольник $ABCD$ — трапеция и у неё равны диагонали, то это — равнобедренная трапеция.

Ответ: четырёхугольник $ABCD$ либо прямоугольник, либо равнобедренная трапеция.

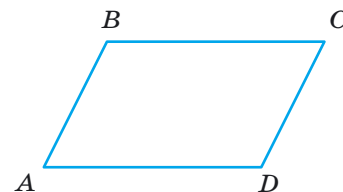


Рис. 4.13

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какие величины называют векторными?
- Что такое скаляр?
- Что называют вектором? Как обозначают векторы?
- Какие из величин: масса, вес, скорость, время, путь, перемещение, площадь — векторные?
- Что называют нулевым вектором?
- Что называют длиной вектора? Чему равна длина нулевого вектора?
- Какие векторы называют коллинеарными?
- Какие векторы называют сонаправленными? противоположно направленными? Как их обозначают?
- Какие векторы называют равными?
- На плоскости обозначены точки A и B . Верно ли, что векторы $\vec{AB}$ и $\vec{BA}$:
 - а) сонаправлены;
 - б) равны;
 - в) коллинеарны;
 - г) имеют равные длины;
 - д) противоположные?
- Точка C — середина отрезка AB . Равны ли векторы $\vec{AC}$ и $\vec{BC}$? $\vec{AC}$ и $\vec{CB}$?
- Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 4.13) Назовите векторы:
 - а) сонаправленные с вектором $\vec{AB}$;
 - б) противоположно направленные с вектором $\vec{DA}$;
 - в) равные вектору $\vec{CD}$;
 - г) равные вектору $\vec{CC}$.

4.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как находить координаты векторов
- Как находить длину вектора

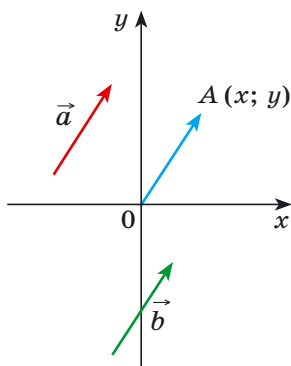


Рис. 4.14

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Мы знаем, как определить координаты точки в прямоугольной системе координат. А как определить координаты вектора?

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА Если на координатной плоскости точки A и B имеют координаты: $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ будет иметь координаты $\{x_B - x_A; y_B - y_A\}$. Они получаются вычитанием из координат конца вектора координат его начала. Таким образом,

координатами вектора в прямоугольной системе координат называют числа, равные разности соответствующих координат его конца и начала.

Координаты x и y вектора $\vec{a}$ записывают так: $\vec{a}\{x; y\}$ (говорят: «Вектор a имеет координаты x и y »).

Пусть в прямоугольной системе координат даны равные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат, получим вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 4.14).

Точка A имеет координаты $A(x; y)$. Найдём координаты вектора $\overrightarrow{OA}$:

$$\overrightarrow{OA}\{x - 0; y - 0\}, \text{ то есть } \overrightarrow{OA}\{x; y\}.$$

Если отложим от начала координат вектор $\vec{b}$, равный вектору $\vec{a}$, то также получим вектор $\overrightarrow{OA}\{x; y\}$.

Мы видим, что

равные векторы имеют равные координаты.

И ещё,

в какую бы точку плоскости мы ни поместили начало вектора, его координаты будут одними и теми же.

Справедливо и следующее утверждение:

если равны соответствующие координаты векторов, то равны и сами векторы.

Ясно, что нулевой вектор имеет координаты $\{0; 0\}$.

ДЛИНА ВЕКТОРА

Пусть в прямоугольной системе координат даны точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$. Найдём длину вектора $\overrightarrow{AB}$. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна расстоянию между точками A и B . Получим:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_B - x_A; y_B - y_A\}$. Таким образом,

длина вектора равна арифметическому квадратному корню из суммы квадратов его координат.

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\vec{a}\{x; y\}$, то длина вектора вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Задача 1. От точки $A(-3; 5)$ отложили вектор $\vec{AB}\{2; -1\}$. Найдите координаты точки B .

Решение. Обозначим координаты точки B как x_B и y_B . Тогда координаты вектора $\vec{AB}$ будут равны:

$$\begin{cases} 2 = x_B - x_A \\ -1 = y_B - y_A \end{cases}$$

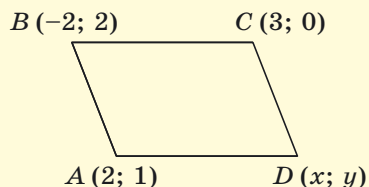
$$\begin{aligned} \text{Отсюда: } x_B &= 2 + x_A = 2 - 3 = -1; \\ y_B &= -1 + y_A = -1 + 5 = 4. \end{aligned}$$

Таким образом, $B(-1; 4)$.

Ответ: $B(-1; 4)$.

Задача 2. Даны три точки, не лежащие на одной прямой: $A(2; 1)$, $B(-2; 2)$, $C(3; 0)$. Найдите точку $D(x; y)$ такую, чтобы четырёхугольник $ABCD$ был параллелограммом.

Решение. Сделаем схематичный рисунок.



Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $BC = AD$ и $BC \parallel AD$.

Рассмотрим векторы $\vec{BC}$ и $\vec{AD}$. Они коллинеарны ($BC \parallel AD$) и лежат по одну сторону от прямой AB , значит, они сонаправлены.

Кроме того, $\vec{BC}$ и $\vec{AD}$ имеют равные длины ($BC = AD$).

Получим: $\vec{BC} \uparrow \vec{AD}$ и $|\vec{BC}| = |\vec{AD}|$, значит, $\vec{BC} = \vec{AD}$. А равные векторы имеют равные координаты. Найдём координаты векторов:

$$\vec{BC}\{3 + 2; 0 - 2\}, \text{ то есть } \vec{BC}\{5; -2\}.$$

$$\vec{AD}\{x - 2; y - 1\}.$$

$$\text{Получаем } \begin{cases} x - 2 = 5 \\ y - 1 = -2; \text{ отсюда } x = 7; y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $D(7; -1)$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют координатами вектора?
- Известно, что $A(2; 5)$, $B(-4; 1)$. Найдите координаты вектора $\vec{BA}$.
- Чему равна длина вектора? Найдите длину вектора $\vec{a}$, если $\vec{a}\{3; -4\}$.
- Что можно сказать о координатах равных векторов?
- Что можно сказать о векторах, имеющих равные координаты?
- $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$. Точки A , B , C не лежат на одной прямой. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ параллелограмм.

4.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Правила сложения векторов
- Законы сложения векторов

СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим операцию сложения двух и более векторов.

ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА В курсе физики вы рассматривали перемещение материальной точки. Пусть материальная точка переместилась сначала из точки A в точку B , а затем из точки B в точку C (рис. 4.15). В результате этих перемещений материальная точка переместилась из точки A в точку C .

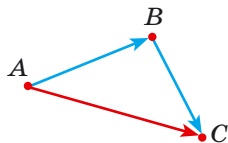


Рис. 4.15

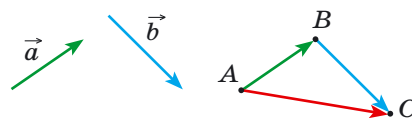


Рис. 4.16

Если перемещения материальной точки представить в виде векторов, то, поскольку перемещение из точки A в точку C складывается из перемещения из точки A в точку B и из точки B в точку C , естественно считать вектор $\overrightarrow{AC}$ суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Рассмотренный пример подсказывает, что называют суммой двух векторов, как сложить два вектора.

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмём произвольную точку A и отложим от неё вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (рис. 4.16). Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется **суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$** .

Записывают сумму так: $\vec{a} + \vec{b}$.

Описанный алгоритм сложения векторов называется **правилом треугольника**. Рисунок 4.16 поясняет это название.

На рисунке 4.16 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Но по правилу треугольника можно складывать и коллинеарные векторы. Так, на рисунке 4.17 вектор $\overrightarrow{AC}$ равен сумме коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

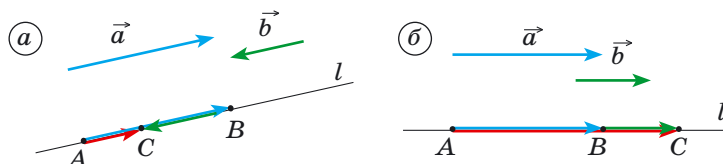


Рис. 4.17

Таким образом, для любых трёх точек выполняется равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Найдём сумму противоположных векторов:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Таким образом, для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

При сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ точку A мы взяли произвольно. Если точку A заменить на любую другую точку A_1 , то вместо вектора $\overrightarrow{AC}$ мы получим равный ему вектор $\overrightarrow{A_1C_1} = \vec{a} + \vec{b}$. Это означает, что

сумма векторов не зависит от выбора точки A .

А как найти координаты суммы векторов? Ответ даёт следующая теорема.

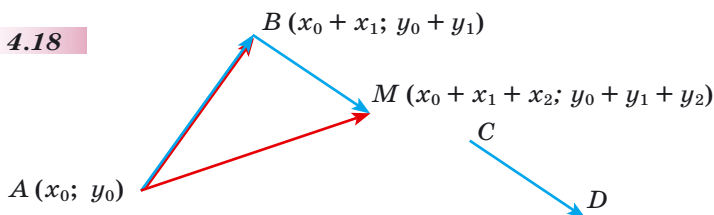
ТЕОРЕМА. Каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

Доказательство. Рассмотрим произвольные векторы $\overrightarrow{AB} \{x_1; y_1\}$ и $\overrightarrow{CD} \{x_2; y_2\}$ и докажем, что вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$.

Пусть точка A имеет координаты $(x_0; y_0)$. Так как вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_1; y_1\}$, то координаты точки B будут равны $(x_0 + x_1; y_0 + y_1)$.

От точки B отложим вектор $\overrightarrow{BM}$, равный вектору $\overrightarrow{CD}$ (рис. 4.18).

Рис. 4.18



Координаты вектора $\overrightarrow{BM}$ равны координатам вектора $\overrightarrow{CD}$. Поэтому координаты точки M будут равны $((x_0 + x_1) + x_2; (y_0 + y_1) + y_2)$.

Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ равны:

$$\{(x_0 + x_1 + x_2) - x_0; (y_0 + y_1 + y_2) - y_0\} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}.$$

По правилу треугольника $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$. ▼



Задача. Докажите, что у противоположных векторов соответствующие координаты являются противоположными числами.

Решение. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x_1; y_1\}$, вектор $-\vec{a}$ имеет координаты $\{x_2; y_2\}$.

Докажем, что x_1 и x_2 , а также y_1 и y_2 — противоположные числа.

Так как $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, то $x_1 + x_2 = 0$ и $y_1 + y_2 = 0$. Отсюда следует, что x_1 и x_2 , а также y_1 и y_2 — противоположные числа.

СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ Свойства сложения векторов аналогичны свойству сложения чисел.

ТЕОРЕМА. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}; \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}); \\ \vec{a} + \vec{0} &= \vec{a}.\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x_a; y_a\}$, а вектор $\vec{b}$ — $\{x_b; y_b\}$.

Тогда вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_a + x_b; y_a + y_b\}$, но такие же координаты имеет и вектор $\vec{b} + \vec{a}$. Значит,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Остальные равенства доказываются аналогично. ▼

СУММА ТРЁХ И БОЛЕЕ ВЕКТОРОВ Сумму трёх и более векторов находят следующим образом: сначала складывают первый и второй векторы, затем складывают полученный вектор с третьим и т. д.

На рисунке 4.19 показано построение суммы векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. В результате получается вектор $\vec{AD}$.

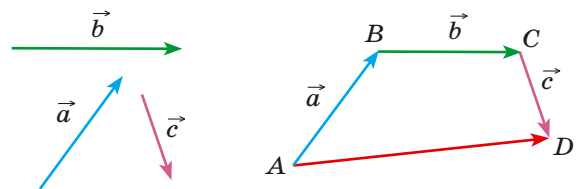


Рис. 4.19

Аналогично можно построить сумму любого числа векторов. Так, на рисунке 4.20 показано построение суммы 5 векторов.

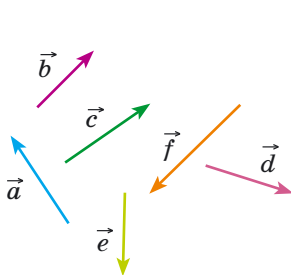


Рис. 4.20

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FK} = \vec{AK}.$$

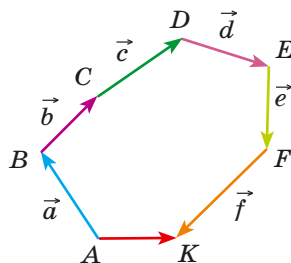


Рис. 4.21

Этот алгоритм построения суммы нескольких векторов называется **правилом многоугольника**.

Из переместительного и сочетательного свойства сложения векторов следует, что при сложении нескольких векторов можно складывать слагаемые в любом порядке (рис. 4.20 и 4.21).

ПРАВИЛО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА Познакомимся с ещё одним правилом сложения векторов, особенно удобным, когда нужно найти сумму векторов, отложенных от одной точки. Такую задачу часто приходится решать в физике при нахождении равнодействующей сил, приложенных к материальной точке (рис. 4.22).

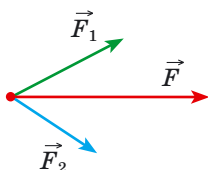


Рис. 4.22

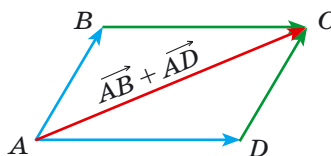


Рис. 4.23

Пусть надо найти сумму неколлинеарных векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$. Отложим вектор $\vec{BC}$, равный вектору $\vec{AD}$ (рис. 4.23).

Тогда $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Так как $\vec{BC} = \vec{AD}$, то четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Таким образом, получаем **правило параллелограмма**:

чтобы сложить неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нужно отложить от какой-нибудь точки A векторы $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{AD} = \vec{b}$ и построить параллелограмм $ABCD$. Тогда вектор $\vec{AC}$ будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

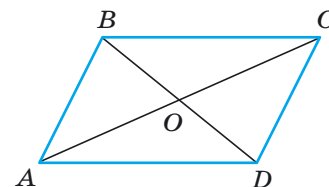


Рис. 4.24

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Объясните, какой вектор называется суммой двух векторов. Какое равенство выражает правило треугольника для нахождения суммы векторов?

Чему равны координаты вектора, равного сумме двух векторов?

Опишите правило параллелограмма для нахождения суммы двух векторов.

Сформулируйте теорему о свойствах сложения векторов.

Докажите переместительное свойство сложения векторов двумя способами: используя координаты векторов и пользуясь правилом треугольника.

Может ли сумма двух векторов быть равной:

- нулевому вектору;
- одному из них?

Может ли длина вектора, равного сумме векторов, равняться длине одного из этих векторов?

В параллелограмме $ABCD$ (рис. 4.24) назовите вектор, являющийся суммой векторов:

- $\vec{AB} + \vec{BD}$;
- $\vec{CB} + \vec{BD}$;
- $\vec{AB} + \vec{AD}$;
- $\vec{AO} + \vec{CO}$;
- $\vec{OD} + \vec{BO}$.

Задача. Некоторое тело помещено на наклонную плоскость. На него действуют силы: сила тяжести $\vec{F}_1$, сила трения $\vec{F}_3$ и сила нормальной реакции опоры $\vec{F}_2$ (рис. 1). Будет ли тело двигаться вниз по наклонной плоскости?

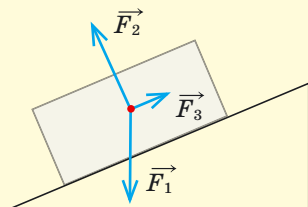


Рис. 1

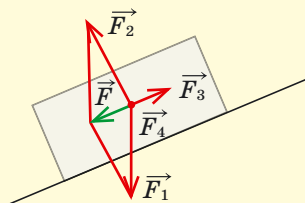


Рис. 2

Решение. Найдём по правилу параллелограмма равнодействующую $\vec{F}$ сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$.

Потом найдём равнодействующую $\vec{F}_4$ сил $\vec{F}$ и $\vec{F}_3$. Равнодействующая $\vec{F}_4$ сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ равна $\vec{0}$, значит, тело двигаться не будет.

4.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

● Как находить разность векторов

РАЗНОСТЬ ВЕКТОРОВ

Вы уже знаете, какой вектор называется суммой векторов, как построить вектор, равный сумме векторов, как найти его координаты. А как быть, когда надо найти разность векторов?

РАЗНОСТЬ ВЕКТОРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Записывают разность так: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Покажем, как построить вектор, равный разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметим на плоскости произвольную точку A и отложим от этой точки векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ (рис. 4.25).

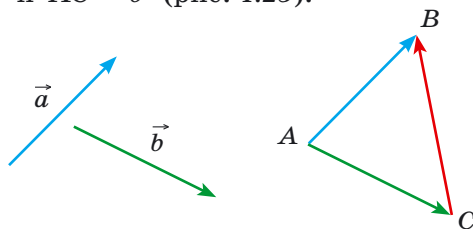


Рис. 4.25

По правилу треугольника $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$, то есть $\vec{b} + \overrightarrow{CB} = \vec{a}$.

Таким образом, сумма векторов $\vec{b}$ и $\overrightarrow{CB}$ равна $\vec{a}$, тогда по определению $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$, то есть $\overrightarrow{CB}$ — искомый вектор.

Итак, для любых трёх точек A , B и C выполняется равенство:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

Это равенство и выражает правило нахождения разности векторов, отложенных от одной точки.

Рассмотрим ещё один способ построения вектора, равного разности векторов. Для этого воспользуемся тем, что сумма противоположных векторов равна нулевому вектору, то есть $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Докажем теорему о разности векторов.

ТЕОРЕМА. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Доказательство. По определению разности векторов имеем:

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a}.$$

Прибавим к обеим частям равенства вектор $(-\vec{b})$:

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{a} + (-\vec{b}), \text{ тогда}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{0} = \vec{a} + (-\vec{b}), \text{ то есть } \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \quad \blacktriangledown$$

Получили ещё один алгоритм построения разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1. Отметим на плоскости точку A и отложим от неё вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (рис. 4.26).

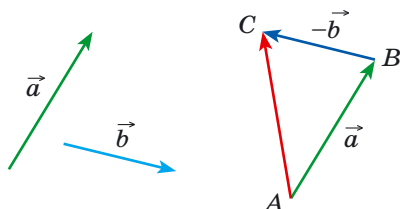


Рис. 4.26

2. Далее от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC} = -\vec{b}$.

3. По правилу треугольника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ или $\vec{a} + (-\vec{b}) = \overrightarrow{AC}$.

По теореме о разности векторов: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, то есть $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AC}$, значит, вектор $\overrightarrow{AC}$ — искомый.

Для нахождения координат вектора, равного разности векторов, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Каждая координата разности векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

Доказательство. Пусть даны векторы $\vec{a}\{x_a; y_a\}$ и $\vec{b}\{x_b; y_b\}$.

Докажем, что вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{x_a - x_b; y_a - y_b\}$.

Обозначим координаты вектора $\vec{c}$ через $\{x; y\}$.

По определению разности:

$$\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_a &= x + x_b; \\ y_a &= y + y_b. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x &= x_a - x_b; \\ y &= y_a - y_b. \end{aligned}$$

Таким образом, $\vec{c}\{x_a - x_b; y_a - y_b\}$. ▼



Задача. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке O , $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Так как точка O — середина диагоналей параллелограмма, то $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$. Из треугольника AOB имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + (-\overrightarrow{BO}) = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \vec{a} - \vec{b};$$

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{AO} = -\vec{b} - \vec{a}.$$

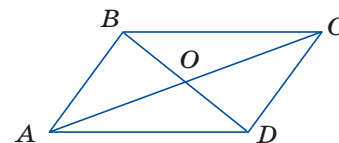


Рис. 4.27

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какой вектор называют разностью векторов?
- Как найти координаты вектора, равного разности векторов?
- Как построить вектор, равный разности векторов, отложенных от одной точки?
- Можно ли свести разность векторов к сложению векторов?
- В параллелограмме $ABCD$ (рис. 4.27) укажите вектор, являющийся разностью векторов:

- а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;
- б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$;
- в) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$;
- г) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB}$;
- д) $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OD}$.

4.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют произведением вектора на число
- Каким свойством обладает произведение вектора на число

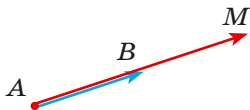


Рис. 4.28

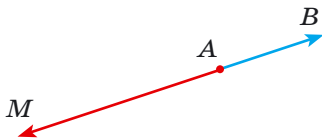


Рис. 4.29

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Можно ли умножить вектор на число? И если да, то как это сделать?

УМНОЖЕНИЕ НЕНУЛЕВОГО ВЕКТОРА НА ЧИСЛО Возьмём

ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$ и число $k = 2$. Построим вектор $\overrightarrow{AM}$ такой, что его длина равна $2|\overrightarrow{AB}|$ (рис. 4.28).

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$ сонаправлены, и $|\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AB}|$. Считается, что вектор $\overrightarrow{AM}$ получен в результате умножения вектора $\overrightarrow{AB}$ на 2.

На рисунке 4.29 векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$ — противоположно направлены и $|\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AB}|$. В этом случае считается, что вектор $\overrightarrow{AM}$ получен в результате умножения вектора $\overrightarrow{AB}$ на -2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа $k \neq 0$ называют такой вектор $\vec{b}$, что:

- 1) $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;
- 2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \downarrow \vec{a}$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k записывают так: $k\vec{a}$.

Из определения следует, что

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}; \quad -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то считается, что $k\vec{a} = \vec{0}$.

Из определения следует, что если $\vec{b} = k\vec{a}$, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ коллинеарны.

А если векторы коллинеарны, можно ли представить один из них в виде произведения некоторого числа k и другого вектора? Оказывается, можно.

ТЕОРЕМА. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует число k такое, что $\vec{b} = k\vec{a}$. Вектор $\vec{b}$ может быть нулевым вектором.

Доказательство. Если $\vec{b} = \vec{0}$, то при $k = 0$ имеем: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Пусть $\vec{b} \neq \vec{0}$, тогда либо $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, либо $\vec{a} \downarrow \vec{b}$.

1-й случай. $\vec{a} \uparrow \vec{b}$. Рассмотрим вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, где $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Так как $k > 0$, то $\vec{c} \uparrow \vec{a}$, а значит, и $\vec{c} \uparrow \vec{b}$.

А кроме того, $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Получим, что $\vec{b} \uparrow \vec{c}$ и $|\vec{b}| = |\vec{c}|$, значит, $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2-й случай. $\vec{a} \downarrow \vec{b}$. Рассмотрим вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, где $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Так как $k < 0$, то $\vec{c} \downarrow \vec{a}$, тогда $\vec{c} \uparrow \vec{b}$. А кроме того, $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Получим, что $\vec{b} \uparrow \vec{c}$ и $|\vec{b}| = |\vec{c}|$, значит, $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$. ▼

ТЕОРЕМА. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

Доказательство. Пусть $\vec{a} \{x; y\}$ — произвольный вектор, k — произвольное число.

Докажем, что координаты вектора $k\vec{a}$ равны $\{kx; ky\}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то согласно определению $k\vec{a} = \vec{0}$ и равенство очевидно.

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $k \neq 0$. Рассмотрим вектор $\vec{b} \{kx; ky\}$ и докажем, что $k\vec{a} = \vec{b}$. Для этого нужно доказать, что $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ и $k\vec{a} \uparrow \vec{b}$.

$$|\vec{b}| = \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)} = |k| \sqrt{x^2 + y^2} = |k| \cdot |\vec{a}|.$$

Докажем, что $\vec{b} \uparrow k\vec{a}$. От начала координат отложим векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$. Прямая OA проходит через начало координат, значит, её уравнение имеет вид

$$y = mx,$$

где m — угловой коэффициент прямой.

Точка $A(x; y)$ принадлежит этой прямой, значит, её координаты удовлетворяют уравнению $y = mx$.

Умножая обе части этого равенства на число $k \neq 0$, получим

$$ky = mkx,$$

а это значит, что координаты точки $B(kx; ky)$ тоже удовлетворяют уравнению прямой OA : $y = mx$.

Значит, точка $B(kx; ky)$ также принадлежит прямой OA . Тогда векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ коллинеарны, то есть $\vec{b} \parallel \vec{a}$.

Если $k > 0$, то числа x и kx , y и ky имеют одинаковые знаки (или оба равны нулю). Следовательно, точки A и B лежат в одной координатной четверти (или на одном координатном луче). А значит, векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ сонаправлены, то есть $\vec{b} \uparrow \vec{a}$, следовательно, $k\vec{a} \uparrow \vec{b}$.

При $k < 0$ векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ будут противоположно направленными, то есть $\vec{b} \downarrow \vec{a}$, а потому $k\vec{a} \uparrow \vec{b}$.

Таким образом, $\vec{b} = k\vec{a}$, а значит, и координаты вектора $k\vec{a}$ равны $\{kx; ky\}$. ▼

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел k , l справедливы равенства:

$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a}) \text{ (рис. 4.30);}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \text{ (рис. 4.31);}$$

$$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} \text{ (рис. 4.32).}$$

Докажите эти равенства самостоятельно.

Свойства сложения векторов и умножения вектора на число позволяют преобразовывать векторные выражения по тем же правилам, что и числовые выражения.

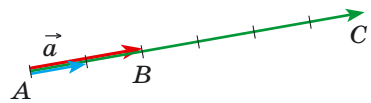


Рис. 4.30

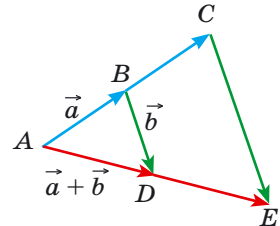


Рис. 4.31

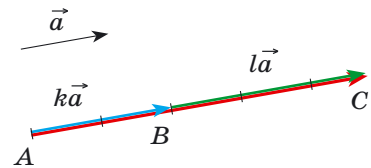


Рис. 4.32

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k , отличное от 0?
- Чему равно произведение $k\vec{a}$, если $k = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$?
- Во сколько раз длина вектора $-2\vec{a}$ больше длины вектора $\vec{a}$?
- Что можно сказать о ненулевых векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{b} = k\vec{a}$?
- Известно, что $\vec{a} \neq \vec{0}$. Определите знак числа k , если:
 - а) $\vec{a} \uparrow k\vec{a}$;
 - б) $\vec{a} \downarrow k\vec{a}$.
- $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Как можно выразить вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$?
- Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x; y\}$. Чему равны координаты вектора $k\vec{a}$?
- Докажите, что если $\vec{a} \{x; y\}$, $\vec{b} \{kx; ky\}$, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$.
- Как связаны между собой соответствующие координаты коллинеарных векторов $\vec{a} \{x_1; y_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2\}$?

4.6

ВЫ УЗНАЕТЕ:

● Что значит разложить вектор по двум неколлинеарным векторам

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ДВУМ НЕКОЛЛИНЕАРНЫМ ВЕКТОРАМ

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то можно выразить один вектор через другой. А можно ли выразить вектор через неколлинеарные векторы?

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО НЕКОЛЛИНЕАРНЫМ ВЕКТОРАМ

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Если вектор $\vec{c}$ представим в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y — некоторые числа, то говорят, что **вектор $\vec{c}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$** . Числа x и y называют коэффициентами разложения вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

ТЕОРЕМА. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы, то любой вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и притом единственным образом.

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Докажем, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Пусть точки A и B — начало и конец вектора $\vec{c}$. Проведём через точки A и B прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно (рис. 4.33).

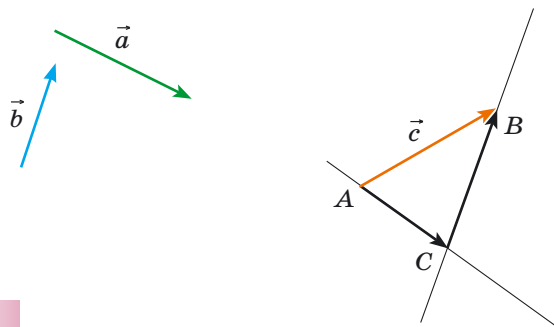


Рис. 4.33

Эти прямые пересекутся в некоторой точке C (так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны). Имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

Так как векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{AC} = x\vec{a}$.

Так как векторы $\vec{b}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{CB} = y\vec{b}$.

Таким образом, получаем, что

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}. \quad (1)$$

Докажем, что коэффициенты x и y — единственные.

Предположим, что наряду с разложением

$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ существует ещё одно разложение:

$$\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}.$$

Вычтем из одного равенства другое, получим:

$$\vec{c} - \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} - (x_1\vec{a} + y_1\vec{b}), \text{ то есть}$$

$$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b}. \quad (2)$$

Это равенство выполняется только в том случае, если

$$x - x_1 = 0 \text{ и } y - y_1 = 0.$$

Если же, например, $x - x_1 \neq 0$, то, выразив из равенства (2) вектор $\vec{a}$, получим:

$$\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1} \vec{b}.$$

Тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию теоремы. Следовательно,

$$x - x_1 = 0 \text{ и } y - y_1 = 0, \text{ то есть } x = x_1 \text{ и } y = y_1.$$

Это и означает, что коэффициенты разложения вектора $\vec{c}$ определяются единственным образом. ▼

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО КООРДИНАТНЫМ ВЕКТОРАМ

В прямоугольной системе координат особую роль играет разложение вектора по координатным векторам. Выясним, какие векторы называются координатными.

Вектор называют **единичным**, если его длина равна единице.

Отложим от начала координат единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ так, чтобы направление вектора $\vec{i}$ совпадало с направлением оси абсцисс, а направление вектора $\vec{j}$ — с направлением оси ординат (рис. 4.34).

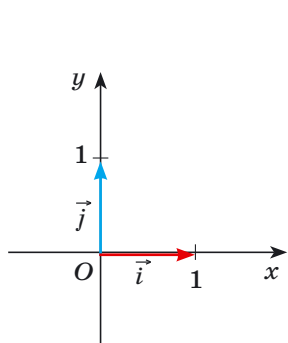


Рис. 4.34

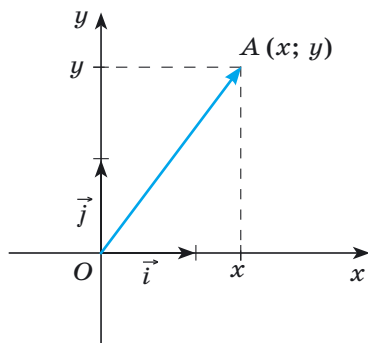


Рис. 4.35

Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ называют **координатными**.

Отложим от начала координат вектор $\vec{OA} = \vec{c} \{x; y\}$ (рис. 4.35).

Так как координатные векторы неколлинеарны, то вектор $\vec{OA}$, а значит, и вектор $\vec{c}$ можно разложить по координатным векторам.

Ясно, что коэффициентами разложения будут координаты вектора $\vec{OA}$:

$$\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}, \text{ а значит, и } \vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то любой вектор можно представить в виде:

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

● Какие векторы называются координатными? Как они обозначаются?

● Назовите координаты вектора $\vec{c}$, если:

а) $\vec{c} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$;

б) $\vec{c} = 3\vec{i}$;

в) $\vec{c} = -2\vec{j}$;

г) $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$.

● Для параллелограмма $ABCD$ запишите разложение вектора $\vec{AC}$ по векторам:

а) $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$;

б) $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$;

в) $\vec{CD}$ и $\vec{AD}$.

4.7

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Примеры применения векторного метода при решении задач

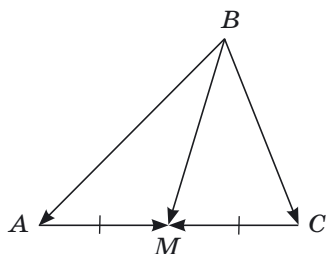


Рис. 4.36

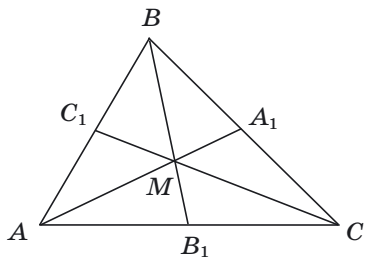


Рис. 4.37

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

На нескольких примерах рассмотрим применение векторов к решению задач. Такой метод решения задач называется векторным. В рассмотренных задачах мы будем пользоваться свойствами коллинеарных векторов, единственностью разложения любого вектора по двум неколлинеарным векторам.

ЗАДАЧА 1

В треугольнике ABC проведена медиана BM . Докажите, что $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

Решение. Рассмотрим треугольник ABM (рис. 4.36). По правилу треугольника получаем:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}.$$

Из треугольника CBM получаем, что

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}.$$

Сложим полученные равенства:

$$2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}.$$

Но векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CM}$ — противоположные ($\overrightarrow{AM} \updownarrow \overrightarrow{CM}$ и $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CM}| = \frac{1}{2}AC$), значит,

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

Тогда

$$2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.$$

Отсюда

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}).$$

ЗАДАЧА 2

В треугольнике ABC точка M — точка пересечения медиан треугольника. Докажите, что

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Решение. Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC (рис. 4.37).

Имеем:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}); \quad \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC});$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$$

Сложив почленно равенства и учитывая, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ и т. д., получим:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} &= \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

По свойству медиан треугольника $AM = \frac{2}{3} AA_1$.
Тогда

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{AA_1}.$$

Аналогично

$$\overrightarrow{MB} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{BB_1}, \quad \overrightarrow{MC} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{CC_1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= -\frac{2}{3} \overrightarrow{AA_1} - \frac{2}{3} \overrightarrow{BB_1} - \frac{2}{3} \overrightarrow{CC_1} = \\ &= -\frac{2}{3} (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = -\frac{2}{3} \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3

Точка пересечения диагоналей четырёхугольника совпадает с точкой пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон. Докажите, что данный четырёхугольник — параллелограмм.

Решение. Пусть диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно (рис. 4.38).

Пусть вектор $\overrightarrow{OB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$.

Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}).$$

Так как $\overrightarrow{OB} \updownarrow \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OA} \updownarrow \overrightarrow{OC}$, то

$$\overrightarrow{OD} = k \overrightarrow{OB} = k \vec{a}, \quad \overrightarrow{OA} = p \overrightarrow{OC} = p \vec{b}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2} (k \vec{a} + p \vec{b}).$$

Из условия следует, что векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ коллинеарны, значит,

$$\overrightarrow{ON} = n \overrightarrow{OM}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (k \vec{a} + p \vec{b}) &= \frac{n}{2} (\vec{a} + \vec{b}); \\ k \vec{a} + p \vec{b} &= n \vec{a} + n \vec{b}; \\ (k - n) \vec{a} &= (n - p) \vec{b}. \end{aligned}$$

Но векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, значит, равенство возможно, только если $k = n = p$. Отсюда следует:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = n (\vec{b} - \vec{a}), \text{ то есть } \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}.$$

Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

Так как $BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$, то, $ABCD$ — параллелограмм по определению.

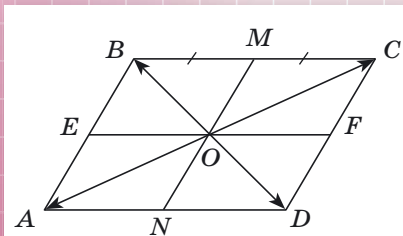
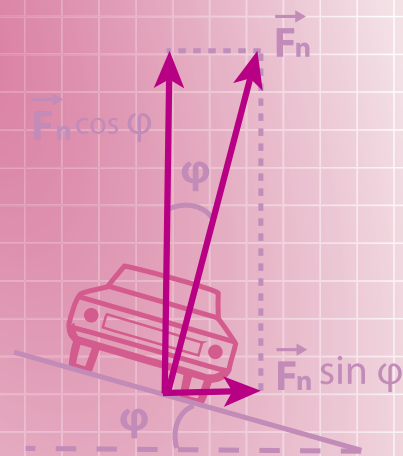


Рис. 4.38



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Докажите, что для любых трёх точек A , B и C имеет место равенство: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, где M — середина отрезка AC .

4.8

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют углом между векторами и как его найти
- Что такое скалярное произведение векторов
- Свойства скалярного произведения векторов

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

В предыдущих пунктах мы рассмотрели операции сложения векторов и умножения вектора на число. В результате этих операций мы вновь получали вектор. Здесь мы рассмотрим операцию, ставящую в соответствие двум векторам число, или, по-другому, скаляр.

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два неколлинеарных вектора. От произвольной точки A отложим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ (рис. 4.39).

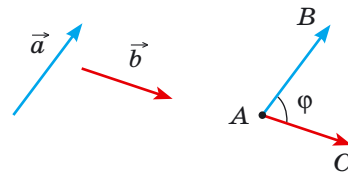


Рис. 4.39

Лучи AB и AC образуют угол BAC . Угол BAC будем называть **углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$** .

Градусную величину этого угла обозначим φ и будем говорить, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ .

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так:

$$(\vec{a}; \vec{b}) \text{ или } \angle(\vec{a}; \vec{b}).$$

Например, на рисунке 4.40: $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$, $\angle(\vec{b}; \vec{c}) = 90^\circ$, $\angle(\vec{b}; \vec{n}) = 180^\circ$.

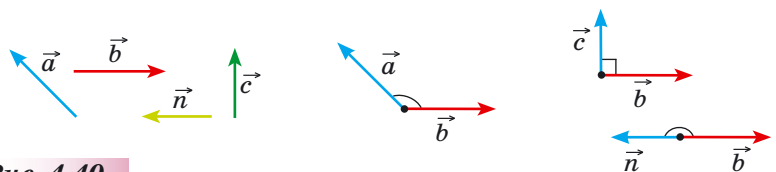


Рис. 4.40

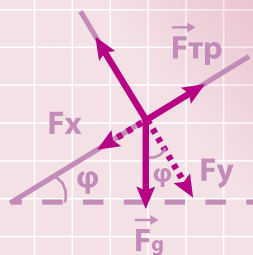
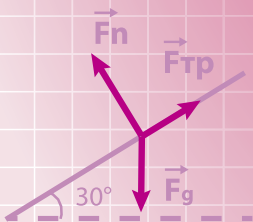
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то считают, что $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0$.

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то также считают, что $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$.

Таким образом, для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $0^\circ \leq (\vec{a}; \vec{b}) \leq 180^\circ$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90° .

Записывают это так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называют число, равное произведению их длин и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение двух векторов, хотя бы один из которых — нулевой, считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a} \vec{b}$. Таким образом, для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Также для любого вектора справедливы равенства:

$$\vec{0} \cdot \vec{a} = 0 \text{ и } \vec{a} \cdot \vec{0} = 0.$$

Пусть $\vec{a} = \vec{b}$. Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называют скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^2$. Мы получили, что

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Таким образом, скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

ТЕОРЕМА. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Доказательство. Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$. Докажем, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Так как $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$ и $\cos 90^\circ = 0$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Пусть теперь $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Докажем, что $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Имеем: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0$. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то $|\vec{a}| \neq 0$; $|\vec{b}| \neq 0$, тогда

$$\cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0.$$

Отсюда $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$, то есть $\vec{a} \perp \vec{b}$. ▼

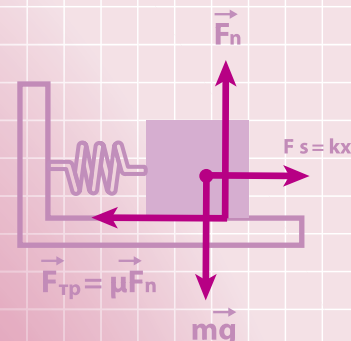
КООРДИНАТНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Скалярное произведение двух векторов можно выразить через координаты этих векторов.

ТЕОРЕМА. Скалярное произведение векторов $\vec{a} \{x_a; y_a\}$ и $\vec{b} \{x_b; y_b\}$ выражается формулой $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

От начала координат отложим векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$ (рис. 4.41). Тогда $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \angle AOB$.



Векторы — мощный инструмент не только математики. Так, на языке векторов формируются основные законы механики и электродинамики. С помощью векторов можно моделировать различные физические процессы. Например, магнитное или электромагнитное поля рассматриваются как векторные поля, что позволяет применять к изучаемым понятиям удобные методы математических расчётов.

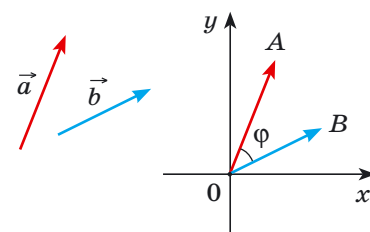


Рис. 4.41

Рассмотрим $\triangle AOB$. По теореме косинусов:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 OA \cdot OB \cos AOB.$$

Отсюда:

$$OA \cdot OB \cdot \cos AOB = \frac{1}{2} (OA^2 + OB^2 - AB^2).$$

Так как $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то

$$OA \cdot OB \cdot \cos AOB = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Имеем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2).$$

Кроме того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$, тогда

$$\overrightarrow{AB} \{x_b - x_a; y_b - y_a\}.$$

Используя формулу для нахождения длины вектора по его координатам, получим:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (x_a^2 + y_a^2) + (x_b^2 + y_b^2) - ((x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2).$$

После упрощения выражения получим формулу:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b.$$

Рассмотрим теперь случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то очевидно, что

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b.$$

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то существует число k такое, что $\vec{b} = k\vec{a}$, то есть $x_b = kx_a$; $y_b = ky_a$.

Если $k > 0$, то $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ и $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$. Получаем:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot k\vec{a} = |\vec{a}| \cdot |k\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |k| \cdot |\vec{a}|^2 \cdot 1 = \\ &= k (x_a^2 + y_a^2) = x_a k x_a + y_a k y_a = x_a x_b + y_a y_b. \end{aligned}$$

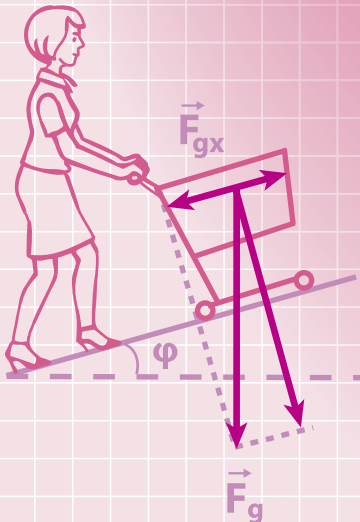
Случай, когда $k < 0$, доказывается аналогично. Докажите его самостоятельно. ▼

СЛЕДСТВИЕ. Косинус угла между ненулевыми векторами можно вычислить по формуле:

$$\cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}.$$

Доказательство.

Из определения скалярного произведения следует, что $\cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. Выразив скалярное произведение и длины векторов через их координаты, получим формулу.



СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

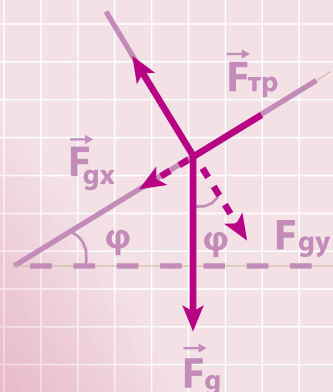
Рассмотрим теорему, выражающую свойства скалярного произведения векторов.

ТЕОРЕМА. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

1. $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{a}^2 = 0$ при $\vec{a} = \vec{0}$;
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
3. $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Доказать эти равенства вы можете самостоятельно. Для этого достаточно выразить скалярное произведение левой и правой частей равенств через координаты векторов. А может, вы найдёте другой способ доказательства?

Из свойств скалярного произведения следует, что при умножении векторов можно пользоваться такими же правилами, что и при умножении числовых выражений.



Задача. Чему равен угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, если медианы, проведённые к боковым сторонам, перпендикулярны?

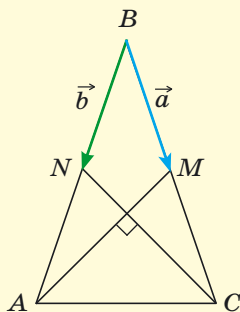
Решение. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC : AM и CN — медианы.

Пусть $\vec{BM} = \vec{a}$, $\vec{BN} = \vec{b}$. $BM = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AB = BN$, значит, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

$$\vec{AM} = \vec{BM} - \vec{BA} = \vec{a} - 2\vec{b}.$$

$$\vec{CN} = \vec{BN} - \vec{BC} = \vec{b} - 2\vec{a}.$$

$$\begin{aligned} \vec{AM} \cdot \vec{CN} &= (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - 2\vec{a}) = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2. \end{aligned}$$



Так как $AM \perp CN$, то

$\vec{AM} \cdot \vec{CN} = 0$. Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos B = \vec{a}^2 \cdot \cos B$, то имеем:

$$0 = 5\vec{a}^2 \cdot \cos B - 4\vec{a}^2;$$

$$\text{откуда } \cos B = \frac{4}{5}.$$

С помощью калькулятора: $\angle B \approx 37^\circ$.

Ответ: $\approx 37^\circ$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Объясните, как можно построить угол, величина которого равна углу между двумя несонаправленными векторами. В каких пределах измеряется угол между любыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
- Чему равен угол между сонаправленными векторами?
- Что называют скалярным произведением двух векторов?
- Что такое скалярный квадрат вектора? Чему он равен?
- Выведите формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты.
- Сформулируйте условие перпендикулярности двух ненулевых векторов.
- Какими свойствами обладает скалярное произведение векторов?

4.9

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Примеры использования скалярного произведения векторов при решении задач

ПРИМЕНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Рассмотрим ещё одну разновидность векторного метода решения задач, использующую свойства скалярного произведения векторов.

ЗАДАЧА 1

Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Решение. Четырёхугольник $ABCD$ — ромб (рис. 4.42). Докажем, что $AC \perp BD$.

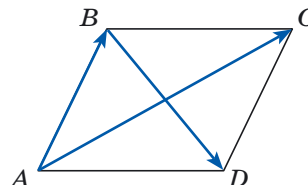


Рис. 4.42

В ромбе $ABCD$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}.$$

Найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = 0.$$

Так как скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ равно нулю, то

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}, \text{ то есть } AC \perp BD.$$

ЗАДАЧА 2

Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.

Решение. Пусть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ . Тогда:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Возведём обе части этого равенства в квадрат:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2 \varphi \text{ или } (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \cdot \cos^2 \varphi.$$

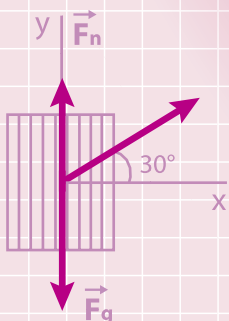
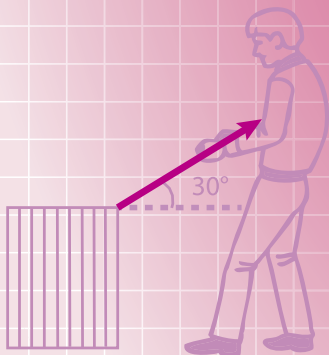
Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, тогда $0^\circ < \varphi < 180^\circ$, а значит, $\cos^2 \varphi < 1$. Тогда

$$\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \cdot \cos^2 \varphi < \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2, \text{ следовательно, } (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 < \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2.$$

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 180^\circ$, тогда $\cos^2 \varphi = 1$, поэтому $\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \cdot \cos^2 \varphi = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.

Таким образом,

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2.$$



ЗАДАЧА 3

Докажите, что в треугольнике ABC

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Решение. Возьмём внутри треугольника ABC любую точку M и опустим из неё перпендикуляры на стороны треугольника (рис. 4.43).

Рассмотрим четырёхугольник AH_1MH_2 .

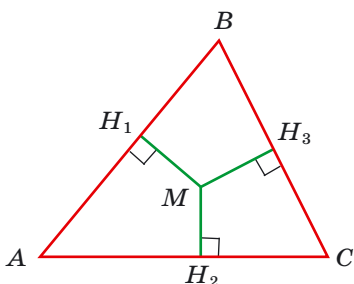


Рис. 4.43

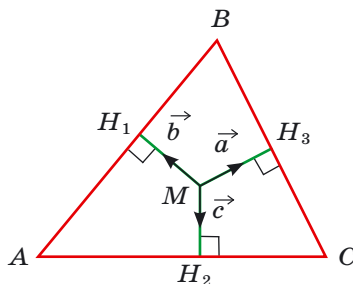


Рис. 4.44

Так как $\angle H_1 = \angle H_2 = 90^\circ$, то $\angle A + \angle H_1MH_2 = 180^\circ$, тогда $\angle H_1MH_2 = 180^\circ - \angle A$. Аналогично

$$\angle H_1MH_3 = 180^\circ - \angle B;$$

$$\angle H_2MH_3 = 180^\circ - \angle C.$$

Отложим от точки M на каждом из перпендикуляров векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ (рис. 4.44).

Заметим, что

$$\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \angle H_1MH_3 = 180^\circ - \angle B.$$

Отсюда

$$\cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \cos(180^\circ - \angle B) = -\cos B.$$

$$\angle(\vec{a}; \vec{c}) = 180^\circ - \angle C. \text{ Отсюда}$$

$$\cos \angle(\vec{a}; \vec{c}) = \cos(180^\circ - \angle C) = -\cos C.$$

$$\angle(\vec{b}; \vec{c}) = 180^\circ - \angle A. \text{ Отсюда}$$

$$\cos \angle(\vec{b}; \vec{c}) = \cos(180^\circ - \angle A) = -\cos A.$$

Возведя сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в квадрат, получим неотрицательную величину:

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} \geq 0.$$

Так как $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, то

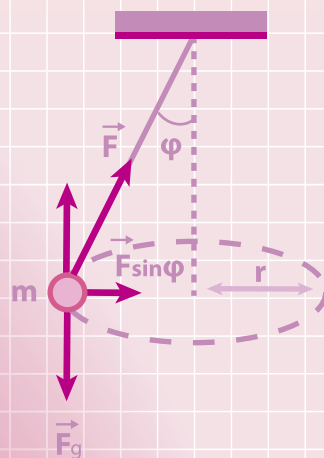
$$\begin{aligned} \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} &= \\ &= 1 + 1 + 1 - 2 \cos B - 2 \cos C - 2 \cos A = \\ &= 3 - 2(\cos B + \cos C + \cos A). \end{aligned}$$

Таким образом, получим, что

$$3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \geq 0.$$

Отсюда

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$



Формулу квадрата трёхчлена легко получить, используя формулу квадрата двучлена:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= ((a + b) + c)^2 = \\ &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + \\ &+ 2ac + 2bc + c^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + \\ &+ 2ac + 2bc. \end{aligned}$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Докажите, пользуясь векторным методом, теорему о средней линии трапеции.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

П. 4.1

1

Отметьте в тетради точки A , B и C , не лежащие на одной прямой. Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$. Сколько векторов задают эти точки?

К Т 2

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Изобразите параллелограмм $ABCD$, точку пересечения его диагоналей обозначьте буквой O .

Среди векторов, заданных его вершинами и точкой O , укажите:

а) равные; б) противоположные; в) лежащие на прямой AB ; г) коллинеарные вектору $\overrightarrow{BC}$; вектору $\overrightarrow{BO}$; д) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{DA}$, с вектором $\overrightarrow{AC}$; е) равные вектору $\overrightarrow{BA}$, вектору $\overrightarrow{CO}$.

2. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Какие ещё равные векторы можно задать точками A , B , C и D ?

3. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Верно ли, что точки A , B , C и D являются вершинами параллелограмма?

Т 3

а) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1). Укажите векторы, заданные его вершинами и: 1) коллинеарные вектору $\overrightarrow{AB}$; 2) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{AA_1}$; 3) противоположно направленные с вектором $\overrightarrow{BC}$; 4) равные вектору $\overrightarrow{CD}$; 5) равные вектору $\overrightarrow{AC}$; 6) противоположные вектору $\overrightarrow{DC_1}$.

б) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1). Укажите векторы, заданные его вершинами и: 1) коллинеарные вектору $\overrightarrow{CB}$; 2) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{BB_1}$; 3) равные вектору $\overrightarrow{C_1 D_1}$.

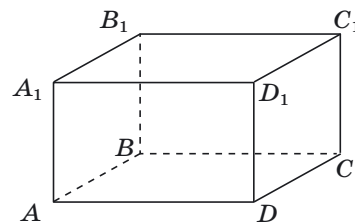


Рис. 1

4

Правильный шестиугольник лежит в основании прямой призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (рис. 2). Укажите векторы, заданные его вершинами и:

а) равные между собой;

б) коллинеарные: вектору $\overrightarrow{BB_1}$; вектору $\overrightarrow{AF}$; вектору $\overrightarrow{BC}$; вектору $\overrightarrow{D_1 E_1}$; вектору $\overrightarrow{A_1 D_1}$.

К Т 5

а) Начертите прямую a и вектор: а) лежащий на прямой a ; б) параллельный прямой a .

б) Изобразите какой-нибудь вектор, а затем изобразите вектор: 1) сонаправленный данному; 2) равный данному; 3) противоположный данному.

6

Изобразите прямую m и вектор $\vec{a}$, не параллельный прямой m . Отметьте на прямой m две точки A_1 и A_2 и отложите два вектора $\overrightarrow{A_1 B_1}$ и $\overrightarrow{A_2 B_2}$, равные вектору $\vec{a}$. Верно ли, что: а) $\overrightarrow{A_1 B_1} \uparrow \overrightarrow{A_2 B_2}$? б) $\overrightarrow{A_1 B_1} \uparrow \overrightarrow{B_2 A_2}$?

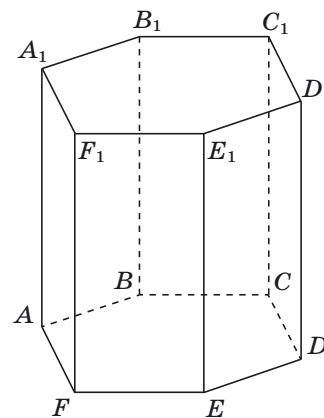


Рис. 2

К Т 7

а) Перерисуйте рисунок 3, а в тетрадь. Изобразите векторы $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ такие, что $\vec{b} \uparrow \vec{a}$; $\vec{c} \uparrow \vec{a}$; $\vec{d} \downarrow \vec{a}$; $\vec{e} = -\vec{a}$.

б) Перерисуйте рисунок 3, б в тетрадь. Изобразите векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$, $\vec{p}$ такие, что $\vec{m} \uparrow \vec{b}$; $\vec{n} \uparrow \vec{b}$; $\vec{k} = \vec{m}$; $\vec{p} = -\vec{a}$.

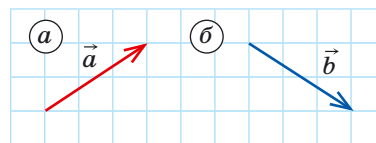


Рис. 3

К Т 8

а) Перенесите рисунок 4 в тетрадь и отложите от точки M вектор, равный вектору $\vec{a}$, а от точки N — вектор, противоположный вектору $\vec{a}$.

б) Начертите вектор $\vec{a}$ и отметьте точки A и B , не лежащие с этим вектором на одной прямой. Отложите от точки A вектор $\vec{m}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\vec{n}$, противоположный вектору $\vec{a}$.

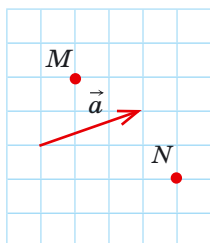


Рис. 4

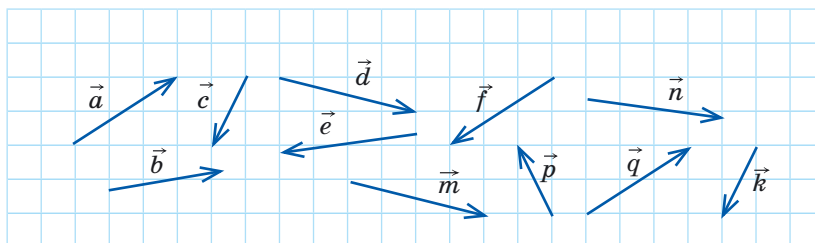


Рис. 5

9

Запишите, какие из векторов, изображённых на рисунке 5: а) равны; б) коллинеарны; в) сонаправлены; г) противоположно направлены.

10

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Вектор $\vec{c}$ коллинеарен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Что можно сказать про вектор $\vec{c}$?

11

Точка C лежит на прямой AB . В каком случае векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены? В каком случае векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ противоположно направлены?

К 12

Начертите треугольник ABC и проведите его среднюю линию MN , концы которой принадлежат сторонам AB и AC . Отложите: а) от точки C вектор, равный вектору $\overrightarrow{AB}$; б) от точки B вектор, равный вектору $\overrightarrow{MN}$; в) от точки M вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{BC}$.

К 13

Начертите треугольник ABC . Отметьте точку M вне треугольника ABC и отложите векторы $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AC}$. Что у вас получилось? Как вы можете это объяснить?

К 14

а) Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Можно ли определить вид четырёхугольника $ABCD$?

б) Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. Можно ли определить вид четырёхугольника $ABCD$?

К Т 15

а) Докажите, что если $ABCD$ — параллелограмм, то:

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

б) Определите вид четырёхугольника $ABCD$, если: 1) $\overrightarrow{AD} \uparrow \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD} \uparrow \overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{DC}$, $|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{CD}|$.

К 16

Из четырёх точек A , B , C и D никакие три не лежат на одной прямой. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Докажите, что середины отрезков AC и BD совпадают.

К Т 17

- а) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Докажите, что точки A , B и C лежат на одной прямой. Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?
 б) Известно, что $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$. Докажите, что точка O является серединой отрезка AB . Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. а) На рисунке 6 $AB \parallel DE$. Докажите, что $\angle ACD = \angle A + \angle D$.
 б) На рисунке 7 $AB \parallel CD$, $\angle MAB = 130^\circ$, $\angle MCD = 140^\circ$. Докажите, что $AM \perp MC$.

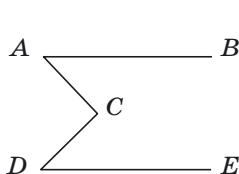


Рис. 6

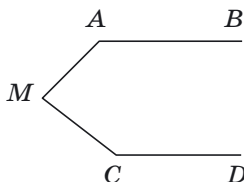


Рис. 7

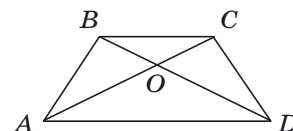


Рис. 8

2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25, один из катетов равен 7, а площадь — 168. Найдите: а) другой катет треугольника; б) высоту, проведённую к гипотенузе.
 3. Острый угол ромба равен 60° , периметр ромба равен 44 см. Найдите меньшую диагональ ромба.
 4. На рисунке 8 точки B и C равноудалены от прямой AD , $BO = OC$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DCB$.
 5. а) $ABCD$ — квадрат со стороной 4. На сторонах AB и CD отложены отрезки AM и NC так, что $AM = NC = 3$. Докажите, что $MBND$ — параллелограмм. Найдите его периметр и площадь.
 б) Четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник. $AB = 16$, $BC = 8$. На сторонах AB и CD отмечены точки M и N соответственно так, что $AM : AB = CN : CD = 3 : 8$. Докажите, что $MBND$ — ромб. Найдите его периметр и площадь.
 6. а) Боковая сторона прямоугольной трапеции равна 26, радиус вписанной в трапецию окружности равен 5. Найдите основания и площадь трапеции.
 б) Боковая сторона прямоугольной трапеции равна 13, большее основание равно 15, радиус вписанной в трапецию окружности равен 6. Найдите меньшее основание и площадь трапеции.
 7. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC : $AB \perp BD$, точки M и N — середины отрезков BC и CD соответственно, $MN = \sqrt{5}$, $AD = 2\sqrt{10}$. Найдите: а) $\angle DBC$; б) BH , если CH — высота треугольника BCD и $\operatorname{tg} HCD = 3$.
 8. а) На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Из этих точек к прямой AC проведены перпендикуляры DM и EN , причём $AM = CN$, $DM = EN$. Докажите, что $AB = BC$.
 б) На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Из этих точек опущены перпендикуляры DM и EN к прямой AC . Известно, что $DM = EN$, $\angle ADM = \angle NEC$. Докажите, что $AB = BC$.
 9. а) Через точку M , лежащую на стороне AB треугольника ABC , проведена прямая, перпендикулярная AB и пересекающая сторону AC в её середине — точке N . Известно, что $\angle MNB = \angle MNA$. Найдите периметр треугольника BMC , если $AC = 12$, $BC = 6$.

б) Через середину стороны AB треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная AB и пересекающая сторону BC в её середине — точке D . Известно, что $BC = 12$. Найдите AC .

10. Выберите верные утверждения.

1) Если две противоположные стороны четырёхугольника параллельны, то четырёхугольник является параллелограммом.

2) Если диагонали параллелограмма равны, то такой параллелограмм — прямоугольник.

3) Если все стороны четырёхугольника равны, то такой четырёхугольник — ромб.

4) Если диагонали четырёхугольника перпендикулярны, то такой четырёхугольник — ромб.

5) Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

6) Если диагонали параллелограмма равны, то параллелограмм — ромб.

7) Любой квадрат является параллелограммом.

8) Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

П. 4.2

К Т 18

а) Нарисуйте вектор $\overrightarrow{OA}$, координаты которого: $\{2; 0\}$; $\{3; 3\}$; $\{0; -4\}$; $\{2; -3\}$.

б) Отметьте точку $B(-4; -3)$ и отложите от неё векторы, координаты которых перечислены в пункте а). Найдите координаты отложенных векторов.

Т 19

Запишите координаты векторов, изображённых на рисунке 9.

20

Векторы $\vec{a} \{2; 4\}$, $\vec{b} \{-3; 2\}$, $\vec{c} \{0; 4\}$ отложены от начала координат. Чему равны координаты концов этих векторов?

Т 21

а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

- 1) $A(0; 3)$, $B(4; 0)$; 2) $A(3; -1)$, $B(4; 2)$;
3) $A(-4; 3)$, $B(4; -3)$; 4) $A(-2; 1)$, $B(-2; 3)$.

б) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BC}$, если:

- 1) $B(3; 1)$, $C(4; 5)$; 2) $B(-4; 0)$, $C(3; -2)$;
3) $B(4; 1)$, $C(5; 2)$; 4) $B(3; -3)$, $C(3; 3)$.

22

Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$, если координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны:
а) 1) $\{2; -3\}$; 2) $\{0; 4\}$; 3) $\{3; 3\}$; б) 1) $\{0; -2\}$; 2) $\{-7; 4\}$; 3) $\{3; 5\}$.

К 23

От точки $A(3; -2)$ отложили вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Найдите координаты точки B , если: а) $\vec{a} \{3; 2\}$; б) $\vec{a} \{0; -4\}$; в) $\vec{a} \{1; 1\}$; г) $\vec{a} \{-5; 0\}$; д) $\vec{a} \{7; -7\}$.

К Т 24

Даны точки: $A(-1; 2)$, $B(2; 3)$, $C(3; 6)$, $D(0; 5)$. Докажите, что:

а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AD}$.

К 25

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-1; -2)$, $B(2; -5)$, $C(1; -2)$, $D(-2; 1)$ является параллелограммом.

б) Докажите, что четыре точки $A(4; 1)$, $B(0; 4)$, $C(-3; 0)$, $D(1; -3)$ являются вершинами параллелограмма.

К 26

Даны точки $A(2; 2)$, $B(-2; 0)$, $C(0; 2)$. Найдите такую точку $D(x; y)$, чтобы: а) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были равны; б) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ были равны.

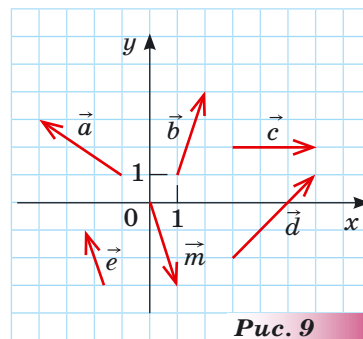


Рис. 9

- 27 Найдите длину вектора $\vec{a}$, если: 1) $\vec{a} \{2; 0\}$; 2) $\vec{a} \{-4; 5\}$; 3) $\vec{a} \{2; -2\}$; 4) $\vec{a} \{-5; -13\}$.
- 28 Среди векторов $\vec{a} \{2; -1\}$, $\vec{b} \{-3; 1\}$, $\vec{c} \{1; -2\}$, $\vec{d} \{3; -4\}$, $\vec{e} \{-\sqrt{3}; \sqrt{7}\}$, $\vec{m} \{-2\sqrt{3}; \sqrt{13}\}$ найдите векторы, длины которых равны.
- 29 Может ли одна из координат вектора равняться его длине? А обе?
- 30 Найдите периметр и площадь ромба, вершины которого имеют координаты: $(-1; 1)$, $(-2; 4)$, $(-5; 5)$, $(-4; 2)$.
- 31 Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(3; 3)$, $B(-2; 3)$, $C(-2; -2)$, $D(3; -2)$ — квадрат.
- 32 Точки $A(-3; 2)$, $B(3; 10)$ и $C(7; 2)$ — вершины треугольника ABC . Найдите: а) его медианы; б) площадь треугольника; в) радиусы вписанной и описанной окружностей этого треугольника.
- 33 а) Найдите на оси Ox точку, равноудалённую от точек $(2; 4)$ и $(3; 5)$.
б) Найдите на оси Oy точку, равноудалённую от точек $(-1; 2)$ и $(2; -3)$.
в) Найдите точку, равноудалённую от осей координат и точки $(4; 9)$.
- 34 а) Найдите координаты вектора $\vec{b}$, если известно, что они равны и $|\vec{b}| = 8$.
б) Дан вектор $\vec{a} \{x; y\}$. Известно, что $|\vec{a}| = 40$ и $x = 3y$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$.
- 35 а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник, и найдите его площадь, если $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$, $C(1; -3)$, $D(-3; -3)$.
б) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — квадрат, и найдите его площадь, если $A(-4; 1)$, $B(0; 4)$, $C(3; 0)$, $D(-1; -3)$.
- 36 Даны три точки $A(-4; 1)$, $B(-2; 4)$, $C(0; 1)$.
а) Докажите, что они являются вершинами равнобедренного треугольника.
б) Найдите координаты и длину вектора $\vec{BM}$, зная, что отрезок BM — медиана треугольника ABC .

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

- Отрезки AB и CD — диаметры окружности, угол ABC равен 58° (рис. 10). Найдите угол AOD .
- Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 11). Угол ABD равен 36° , угол CAD равен 43° . Найдите угол ABC .
- Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 95° и 72° (рис. 12). Чему равен меньший из оставшихся углов?
- На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N (рис. 13). Известно, что $\angle MBA = 44^\circ$. Найдите угол MNB .

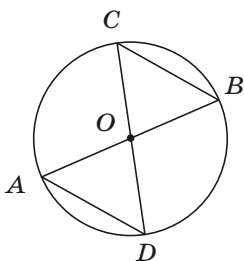


Рис. 10

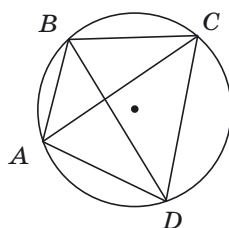


Рис. 11

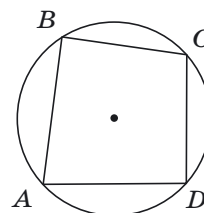


Рис. 12

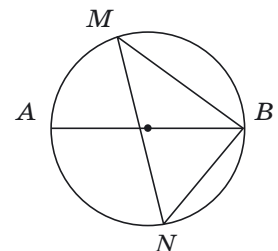


Рис. 13

5. а) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC медианы AM и CN пересекаются в точке O . Докажите, что: 1) $\triangle AMC = \triangle CNA$; 2) $\triangle AOC$ — равнобедренный.
- б) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O . Докажите, что: 1) $\triangle ADC = \triangle CEA$; 2) $\triangle AOC$ — равнобедренный.
6. а) В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена биссектриса AD . В треугольнике BDA провели высоту DH , $\angle CDH = 130^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .
- б) В прямоугольном треугольнике ABC серединный перпендикуляр к гипотенузе AB пересекает катет BC в точке D , $\angle ADC = 40^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .
7. а) Прямоугольный треугольник вписан в окружность. Найдите длину окружности и площадь круга, если катеты треугольника равны 5 и 12.
- б) Длина окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равна 17π . Найдите площадь и периметр этого треугольника, если один из его катетов равен 5.
8. Окружность описана около равнобедренного треугольника. Из центра окружности основание треугольника видно под углом 140° . Найдите углы треугольника. Рассмотрите все возможные варианты.
9. В треугольник со сторонами 11, 25 и 30 вписана окружность, в которую вписан правильный треугольник. Найдите площадь правильного треугольника.

П. 4.3

- К Т 37** Начертите треугольник ABC . Изобразите: а) вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) вектор $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$; в) вектор $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$; г) вектор $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$.
- К Т 38** Начертите параллелограмм $ABCD$. Изобразите векторы:
- а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$;
 д) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$; е) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$; ж) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; з) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA}$.
- 39** Пользуясь правилом треугольника, постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунке 14.
- К 40** Пользуясь правилом параллелограмма в тех случаях, когда оно применимо, постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунке 14.
- К Т 41** Постройте вектор, равный сумме векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 15).

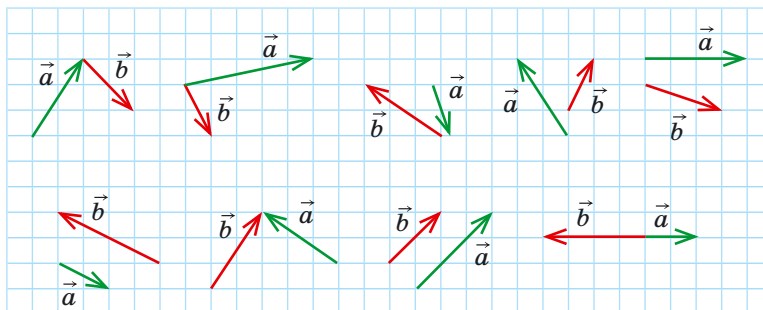


Рис. 14

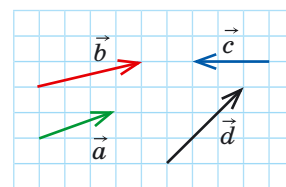


Рис. 15



42

а) Известно, что сторона равностороннего треугольника ABC равна 5. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

б) Известно, что сторона квадрата $ABCD$ равна $3\sqrt{2}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Т 43

а) Найдите координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$, если: 1) $\vec{a} \{3; -1\}$, $\vec{b} \{4; -2\}$; 2) $\vec{a} \{0; -3\}$, $\vec{b} \{-4; 1\}$; 3) $\vec{a} \{-1; -1\}$, $\vec{b} \{2; -5\}$; 4) $\vec{a} \{-4; 3\}$, $\vec{b} \{2; 0\}$.

б) Чему равны координаты вектора $\overrightarrow{BA}$, если известны координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: 1) $\overrightarrow{AB} \{4; -2\}$; 2) $\overrightarrow{AB} \{-3; 2\}$?

44

а) Известно, что $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Найдите x и y , если $\vec{a} \{-1; y\}$, $\vec{b} \{x; 4\}$, $\vec{c} \{-2; 1\}$.

б) Известно, что $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Найдите x и y , если $\vec{a} \{2; y\}$, $\vec{b} \{-3; 4\}$, $\vec{c} \{x; 0\}$.

45

а) Докажите, что для любых n точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ выполняется равенство $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

46

а) Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что для любой точки M выполняется равенство:

1) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$.

б) BM — медиана треугольника ABC . Докажите, что:

1) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$; 2) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

47

а) Докажите, что для векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеет место неравенство $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| \geq |\overrightarrow{AC}|$.

б) Докажите, что для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

48

Докажите, что если для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, то $\vec{a} \uparrow \vec{b}$.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. Наклонная крыша установлена на трёх опорах, основания которых расположены на одной прямой на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 16).

а) Найдите высоту средней опоры, если высота большей опоры равна 3 м, а меньшей — 2,2 м.

б) Найдите высоту меньшей опоры, если высота большей опоры равна 2,8 м, средней опоры — 2,5 м.

2. Вертикальный столб крепится тросом длиной 10 м к стене дома на высоте 3 м от земли (рис. 17). Чему равна высота столба, если его основание расположено на расстоянии 8 м от дома?

3. В остроугольном треугольнике высота CH равна 5 см, сторона $BC = 17$ см (рис. 18). Чему равен косинус угла B ?

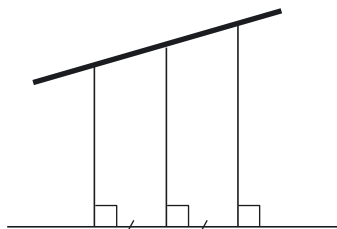


Рис. 16

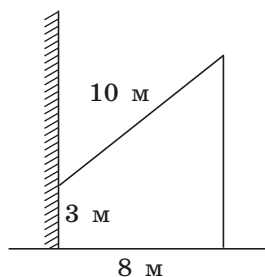


Рис. 17

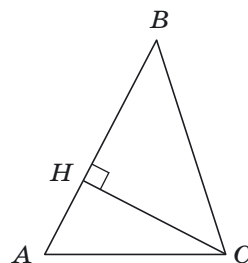


Рис. 18

4. а) В треугольнике ABC : $AC = BC$, $AB = 8$, высота CH равна $4\sqrt{3}$. Найдите угол A .
 б) В треугольнике ABC : $AB = BC$, $AC = 30$, высота CH равна $15\sqrt{3}$. Найдите угол ACB .
5. а) Один из углов параллелограмма на 25° больше другого. Найдите эти углы.
 б) Найдите больший угол параллелограмма, если два его угла относятся как $5 : 31$.
6. а) Стороны параллелограмма равны 12 см и 5 см. Биссектрисы двух углов, прилежащих к его большей стороне, делят противоположную сторону на три отрезка. Найдите эти отрезки.
 б) Биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три отрезка, длины которых последовательно равны 4 , 5 и 4 . Найдите периметр параллелограмма. Рассмотрите все возможные случаи.
7. а) Сторона AB параллелограмма $ABCD$ равна 8 см, его периметр равен 40 см. Какую сторону пересекает биссектриса угла A ? Найдите отрезки, на которые биссектриса делит эту сторону.
 б) Биссектриса угла A делит сторону BC параллелограмма $ABCD$ на отрезки длиной 3 см и 7 см. Найдите периметр параллелограмма.
8. Точки P и M — соответственно середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и PC делят диагональ BD на три равные части.
9. Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

П. 4.4

49

Даны векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (рис. 19). Докажите, что $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

50

Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте векторы:

- а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$;
 д) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA}$; е) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$; ж) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD}$; з) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.

51

Дан параллелограмм $ABCD$. Разностью каких векторов, заданных его вершинами, является вектор: а) $\overrightarrow{AB}$? б) $\overrightarrow{AD}$? в) $\overrightarrow{DC}$? г) $\overrightarrow{CD}$?

52

Начертите треугольник ABC . Постройте векторы:

- а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

53

На рисунке 20, а—б изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Постройте вектор: а) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; б) $\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$; в) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; г) $\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$.

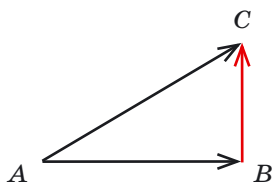


Рис. 19

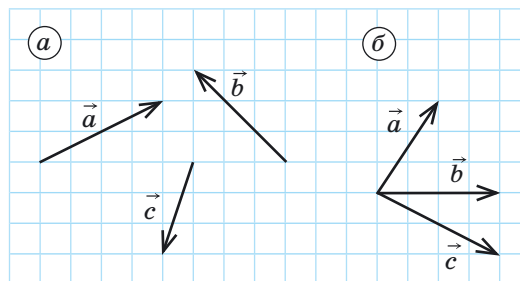


Рис. 20

54

а) Дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что $\vec{CA} = \vec{a}$; $\vec{BA} = \vec{b}$. Выразите векторы $\vec{AD}$, $\vec{BC}$, $\vec{DC}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

б) Дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что $\vec{CD} = \vec{a}$; $\vec{DB} = \vec{b}$. Выразите векторы $\vec{CB}$, $\vec{AB}$, $\vec{DA}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

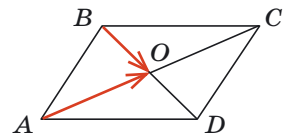


Рис. 21

55

Диагонали параллелограмма пересекаются в точке O (рис. 21), $\vec{AO} = \vec{a}$, $\vec{BO} = \vec{b}$. а) Выразите векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. б) Выразите векторы $\vec{BC}$ и $\vec{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

56

Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ и его длину, если:

а) $\vec{a} \{3; -1\}$, $\vec{b} \{4; -5\}$;

б) $\vec{a} \{0; 3\}$, $\vec{b} \{3; 0\}$;

в) $\vec{a} \{-2; -2\}$, $\vec{b} \{-3; 7\}$;

г) $\vec{a} \{4; -2\}$, $\vec{b} \{-1; -2\}$.

57

Даны векторы $\vec{a} \{3; -2\}$ и $\vec{b} \{-2; 5\}$. Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ и их длины.

58

Докажите, что для любых точек A, B, C и D выполняются равенства:

а) $\vec{DA} - \vec{DB} = \vec{CA} - \vec{CB}$;

б) $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$.

59

Даны векторы $\vec{a} \{2; -1\}$, $\vec{b} \{-3; 1\}$, $\vec{c} \{1; -4\}$, $\vec{d} \{3; 0\}$.

Найдите координаты векторов:

а) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$;

б) $\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$;

в) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

г) $\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$.

60

Отрезок BM — медиана треугольника ABC . Выразите вектор $\vec{BM}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $\vec{a} = \vec{CB}$, $\vec{b} = \vec{AD}$;

б) $\vec{a} = \vec{AD}$, $\vec{b} = \vec{AB}$.

61

В треугольнике $ABCD$: $AB = 3$, $BC = 4$, точка O — точка пересечения диагоналей. Найдите длину вектора $\vec{a}$, если: а) $\vec{a} = \vec{AB} - \vec{AD}$; б) $\vec{a} = \vec{AB} - \vec{AC}$; в) $\vec{a} = \vec{AO} + \vec{OD} + \vec{DC}$.

Т 62

Перерисуйте рисунок 22 в тетрадь. Известно, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{AA_1} = \vec{b}$, $\vec{AB} = \vec{c}$. Выразите через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы $\vec{AC}$; $\vec{C_1 D}$; $\vec{B_1 D_1}$; $\vec{BD_1}$.

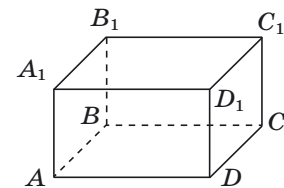


Рис. 22

К Т 63

На материальную точку действуют три силы. Две из них равны по величине и перпендикулярны. Третья сила в 3 раза больше по величине и образует с первыми двумя равные тупые углы. Изобразите равнодействующую силу.

К Т 64

На рисунке 23 изображён тетраэдр $DABC$. Докажите, что $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$.

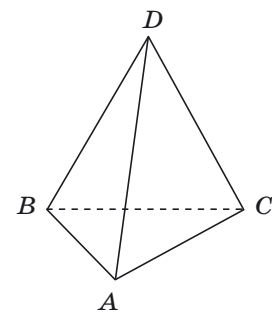


Рис. 23

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и углом при основании 52° проведена биссектриса AM (рис. 24). Найдите угол AMB .

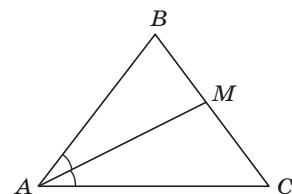


Рис. 24

2. а) В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O (рис. 25). Найдите угол BOD , если $\angle BAC = 40^\circ$, а $\angle ACB = 48^\circ$.

б) В треугольнике ABC высоты AE , BH и CD пересекаются в точке O (рис. 26). Найдите угол AOH , если $\angle BAC = 74^\circ$, а $\angle ABC = 62^\circ$.

3. а) В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 28° . Найдите углы данного треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 24° . Найдите меньший угол данного треугольника.

4. а) В ромбе $ABCD$ угол ABC равен 124° . Найдите угол CAD .

б) В ромбе $ABCD$ угол BDC равен 78° . Найдите угол DAB .

5. Стороны параллелограмма равны 4 и 7. Высота, опущенная на большую сторону, равна 6. Найдите высоту, опущенную на меньшую сторону параллелограмма.

6. Диагонали ромба равны 18 и 32. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон ромба. Что это за четырёхугольник?

7. Стороны треугольника равны 6, 8, 12. Найдите площадь треугольника, подобного данному, если его бо́льшая сторона равна 36.

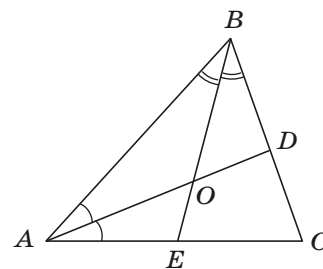


Рис. 25

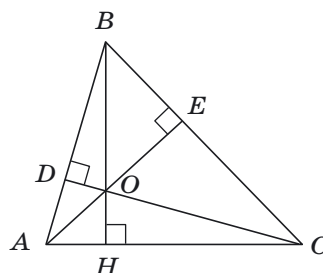


Рис. 26

П. 4.5

К Т 65

а) Нарисуйте вектор $\vec{a}$. Нарисуйте векторы $2\vec{a}$; $-3\vec{a}$; $\frac{1}{2}\vec{a} - 0,5\vec{a}$.

б) Перенесите рисунок 27 в тетрадь и нарисуйте векторы $-2\vec{m}$; $1,5\vec{m}$; $-\frac{1}{3}\vec{m}$.

К 66

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{a}$? б) $\vec{b} - 3\vec{a}$ и $\vec{a}$?

К 67

Дан ненулевой вектор $\vec{a}$. Определите знак числа k , если:

а) векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ сонаправлены; б) векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ противоположно направлены; в) векторы $-2\vec{a}$ и $k\vec{a}$ противоположно направлены; г) $3\vec{a}$ и $k\vec{a}$ сонаправлены.

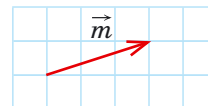


Рис. 27

К Т 68

а) Нарисуйте векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте векторы:

1) $2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $-\vec{a} + 2\vec{b}$; 3) $2\vec{a} - 3\vec{b}$; 4) $-3\vec{a} - \vec{b}$.

б) Используя рисунок 28, постройте векторы:

1) $2\vec{a} - 0,5\vec{b}$; 2) $-3\vec{a} + 2\vec{b}$.

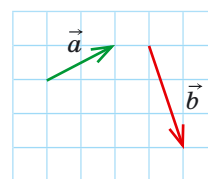


Рис. 28

К Т 69

Нарисуйте два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметьте произвольную точку M и отложите от точки M векторы:

а) $2\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{a} + 0,5\vec{b}$; в) $-3\vec{a} + 2\vec{b}$.

$$\vec{AB} + \vec{AD}$$

- К 70** Докажите, что: а) векторы $\vec{a} \{2; -1\}$ и $\vec{b} \{4; -2\}$ сонаправлены; б) векторы $\vec{a} \{2; -1\}$ и $\vec{b} \{-1; 0,5\}$ противоположно направлены.
- К 71** Известно, что $|\vec{a}| = 5$. Найдите длины векторов: а) $3\vec{a}$; б) $-0,2\vec{a}$.
- 72** Даны векторы $\vec{a} \{3; -2\}$ и $\vec{b} \{4; 1\}$. Найдите вектор $\vec{c}$ и его длину, если: а) $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.
- К Т 73** На отрезке AB длиной 12 см лежит точка M , причём $BM = 8$ см. Выразите: а) $\overrightarrow{AM}$ через $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{BM}$; в) $\overrightarrow{BM}$ через $\overrightarrow{AM}$.
- 74** Точка M делит отрезок AB в отношении $3:1$, считая от точки A . Выразите: а) $\overrightarrow{AM}$ через $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BM}$ через $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{MB}$ через $\overrightarrow{AM}$.
- 75** Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Найдите, чему равен y , если: а) $\vec{a} \{2; 3\}$, $\vec{b} \{-1; y\}$; б) $\vec{a} \{-4; y\}$, $\vec{b} \{8; -5\}$.
- 76** Упростите выражение: а) $-2 \cdot 3\vec{a}$; б) $0,5(-4\vec{a})$; в) $3\vec{a} - 4(5\vec{b} - 2\vec{a})$; г) $2(3\vec{a} + \vec{b}) + 3(5\vec{b} - 2\vec{a})$.
- Т 77** Из данных равенств выразите каждый из векторов через другие: а) $3\vec{a} - 4\vec{b} = \vec{0}$; б) $3(\vec{a} + 2\vec{b}) - 4\vec{b} = \vec{0}$; в) $m\vec{a} + n\vec{b}$; г) $m\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$.
- К 78** Постройте точки A , B и C такие, что: а) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} = -0,5\overrightarrow{AC}$.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

- Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна 5 см, а длина основания — 24 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла при основании треугольника.
- Катеты прямоугольного треугольника равны 30 и 40. Найдите угол между медианой и высотой, проведёнными к гипотенузе.
- а) Тень от столба высотой 11 м равна 4,4 м. Выразите в градусах высоту солнца над горизонтом.
б) На расстоянии 700 м от точки отрыва самолёта от земли расположены деревья высотой 24 м. Под каким углом должен подниматься самолёт, чтобы не задеть деревьев?
- В треугольнике ABC : $AB = BC$, а высота AE в два раза меньше высоты BD . Найдите косинус угла при основании треугольника.
- Стороны треугольника равны 15, 20 и 25 см. Найдите медиану и высоту, проведённые к большей стороне.
- Найдите углы параллелограмма площадью 24 см^2 , если его высота, проведённая из вершины тупого угла, делит основание на отрезки 3 см и 5 см. Рассмотрите все возможные случаи.

П. 4.6

- К 79** Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то: а) векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ не коллинеарны; б) векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $2\vec{a} + \vec{b}$ не коллинеарны; в) векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} + 3\vec{b}$ не коллинеарны.
- К 80** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите числа x и y , удовлетворяющие равенству: а) $2\vec{a} + x\vec{b} = y\vec{a} + \vec{b}$; б) $3\vec{a} + x\vec{a} + 5\vec{b} - y\vec{b} = \vec{0}$; в) $2\vec{a} - y\vec{b} + x\vec{a} = \vec{0}$; г) $\vec{a} - \vec{b} - x\vec{a} + 5y\vec{b} = \vec{0}$.

К Т 81 Точка M лежит на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, причём $AM : MC = 2 : 3$. Разложите по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$:

а) вектор $\overrightarrow{AM}$; б) вектор $\overrightarrow{MC}$; в) вектор $\overrightarrow{MA}$.

Т 82 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Точки M и N — середины отрезков AO и DO соответственно. Разложите: а) вектор $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$; б) вектор $\overrightarrow{NC}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

К Т 83 Начертите прямоугольную систему координат и координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Постройте векторы с началом в точке O , заданные координатами: $\vec{a} \{2; 1\}$, $\vec{b} \{-3; 0\}$, $\vec{c} \{-4; -3\}$, $\vec{d} \{0; 5\}$, $\vec{e} \{4; -2\}$, $\vec{f} \{-2; 5\}$, и запишите их разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

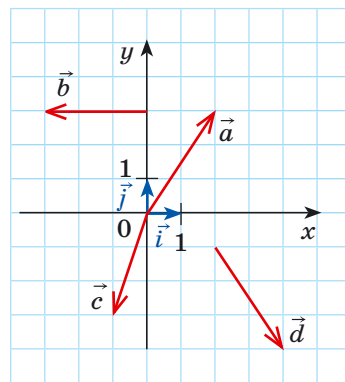


Рис. 29

84 Разложите векторы, изображённые на рисунке 29, по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и запишите их координаты.

85 а) Запишите координаты вектора $\vec{a}$, если:
1) $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$; 2) $\vec{a} = 2\vec{j}$; 3) $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j}$;
4) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; 5) $\vec{a} = -4\vec{j}$; 6) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$.

б) Запишите координаты вектора $\vec{b}$, если:

1) $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$; 2) $\vec{b} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$; 3) $\vec{b} = 2\vec{j}$; 4) $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j}$.

86 Коллинеарны ли векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$, $\vec{a} \{0; 0\}$ и $\vec{b} \{3; 1\}$, $\vec{m} \{-2; 1\}$ и $\vec{n} \{-1; -0,5\}$?

87 а) Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора $\vec{a}$, если:
1) $\vec{a} \{-2; 1\}$; 2) $\vec{a} \{3; -4\}$; 3) $\vec{a} \{0; -2\}$; 4) $\vec{a} \{-1; 1\}$.

б) Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора $\vec{b}$, если:
1) $\vec{b} \{1; 1\}$; 2) $\vec{b} \{3; 0\}$; 3) $\vec{b} \{-4; 2\}$; 4) $\vec{b} \{-1; 4\}$.

Т 88 Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$, если: а) $\vec{a} \{3; -2\}$, $\vec{b} \{0; -4\}$; б) $\vec{a} \{1; 3\}$, $\vec{b} \{-2; 5\}$.

89 Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора $2\vec{a} - 3\vec{b}$, если: а) $\vec{a} \{1; -1\}$, $\vec{b} \{-3; 2\}$; б) $\vec{a} \{2; 0\}$, $\vec{b} \{-4; -1\}$.

90 Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$, если:

а) $\vec{a} \{1; -2\}$, $\vec{b} \{2; -3\}$, $\vec{c} \{-3; 2\}$; б) $\vec{a} \{1; 0\}$, $\vec{b} \{-4; 2\}$, $\vec{c} \{3; -1\}$.

91 а) На стороне AC треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : MC = 3 : 4$. Докажите, что $\overrightarrow{BM} = \frac{4}{7} \overrightarrow{BA} + \frac{3}{7} \overrightarrow{BC}$.

б) На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : MB = 1 : 2$. Докажите, что $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}$.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Найдите: а) гипотенузу; б) синус наименьшего угла; в) медиану, проведённую к гипотенузе.

2. Отрезок MN является средней линией треугольника ABC (рис. 30). Площадь треугольника ABC равна 24. Найдите площадь треугольника MNC .

3. Основания трапеции равны 7 и 11. Найдите меньший из отрезков, на которые делит среднюю линию диагональ трапеции.

4. а) Диагональ прямоугольника, равная 10, образует с одной из его сторон угол 30° . Найдите:

- 1) площадь прямоугольника;
- 2) угол между диагоналями прямоугольника.

б) Одна из сторон прямоугольника, равная 8, образует угол 60° с диагональю. Найдите:

- 1) угол между диагоналями прямоугольника;
- 2) периметр прямоугольника.

5. а) Диагонали ромба равны 30 и 40. Найдите периметр ромба.

б) Диагонали ромба равны 24 и 32. Найдите высоту ромба.

6. Стороны правильного треугольника и квадрата равны. Найдите отношение их площадей.

7. Найдите длину окружности и площадь круга, вписанных в ромб, если:
а) диагонали ромба равны 12 см и 16 см; б) сторона ромба равна a , а острый угол равен α .

8. Найдите площадь равнобедренной трапеции с боковой стороной 10 см, описанной около окружности радиуса 4 см.

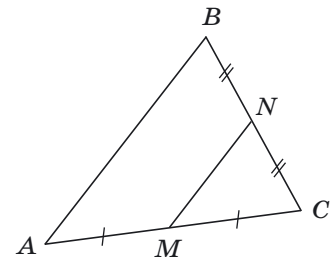


Рис. 30

п. 4.7

92

Точки E и M — середины отрезков AB и CD соответственно (рис. 31). Докажите, что

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

93

а) Пользуясь равенством, доказанным в предыдущей задаче, докажите теорему о средней линии трапеции.

б) Точки M и N — соответственно середины диагоналей трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Докажите, что $MN \parallel AD$.

94

Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

95

Докажите теорему о средней линии треугольника с помощью векторов.

Т 96

а) Точка O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

б) Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Известно, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Докажите, что $ABCB$ — параллелограмм.

в) Известно, что никакие три из точек A , B , C и D не лежат на одной прямой, причём $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

97

Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

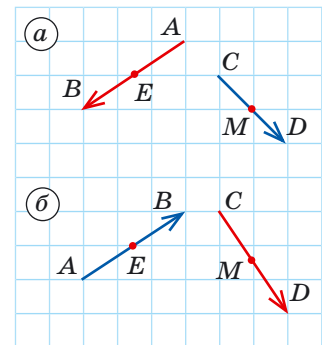


Рис. 31

98

На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отметили точку M так, что $CM = \frac{1}{5}BC$; на диагонали AC отметили точку N так, что $CN = \frac{1}{6}AC$. Докажите, что точки M , N и D лежат на одной прямой.

99

Точка H — ортоцентр треугольника ABC , точка O — центр описанной около треугольника окружности. Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

100

Докажите, что середины оснований трапеции и точка пересечения продолжений её боковых сторон лежат на одной прямой.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

- а) Найдите неизвестную сторону треугольника, если две другие его стороны и угол между ними соответственно равны 8 см, 15 см и 60° .
б) В треугольнике ABC стороны AB и BC равны 7 и 15 соответственно и образуют угол 60° . Найдите периметр треугольника.
- а) Найдите длины сторон параллелограмма и площадь, если его диагонали длиной $6\sqrt{2}$ и 14 пересекаются под углом 45° .
б) Найдите длины диагоналей параллелограмма, если его стороны равны 5 и 8, а один из углов в 2 раза больше другого.
- Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 34, а диагонали — 11 и 13.
- Стороны треугольника длиной 5 и 21 образуют угол 120° . Найдите длину медианы, проведённой из вершины этого угла.
- Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с углом 120° , равен $4\sqrt{3}$. Найдите стороны и площадь треугольника.

П. 4.8

К 101

На рисунке 32 изображён куб. Найдите угол: а) между векторами $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{B_1D}$ и $\overrightarrow{BD_1}$.

К Т 102

Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O . Сделайте чертёж и найдите угол между векторами:

- а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}$;
в) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{BD}$; г) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{DO}$.

К Т 103

Дан квадрат со стороной, равной 1. Вычислите:

- а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD}$;
г) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; д) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA})$.

104

Диагональ AC ромба $ABCD$ равна его стороне. Диагонали ромба пересекаются в точке O . Сделайте чертёж и найдите угол между векторами:

- а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CO}$; г) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AD}$; д) $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{DC}$.

К Т 105

Медианы AM и BD равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке O . Сделайте чертёж и найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{DA}$; б) $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{AO}$; г) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{MO}$.

106

Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, а угол между векторами равен: а) 60° ; б) 135° ; в) 30° ; г) 90° ; д) 120° ; е) 180° .

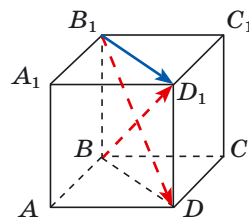


Рис. 32

107

а) Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

- 1) $\vec{a} \{3; -1\}$, $\vec{b} \{4; -2\}$; 2) $\vec{a} \{0; -3\}$, $\vec{b} \{-4; 1\}$;
 3) $\vec{a} \{-1; -1\}$, $\vec{b} \{2; -5\}$; 4) $\vec{a} \{-4; 3\}$, $\vec{b} \{2; 0\}$.

б) Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

- 1) $\vec{a} \{3; -1\}$, $\vec{b} \{4; -5\}$; 2) $\vec{a} \{0; 3\}$, $\vec{b} \{3; 0\}$;
 3) $\vec{a} \{-2; -2\}$, $\vec{b} \{-3; 7\}$; 4) $\vec{a} \{4; -2\}$, $\vec{b} \{-1; -2\}$.

108

Даны векторы $\vec{a} \{2; -1\}$, $\vec{b} \{-3; 1\}$, $\vec{c} \{1; -4\}$, $\vec{d} \{3; 0\}$. Найдите:

- а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a} \cdot \vec{c}$; в) $\vec{b} \cdot \vec{c}$; г) $\vec{d} \cdot \vec{a}$.

109

а) Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

- 1) $\vec{a} \{3; -2\}$, $\vec{b} \{-2; 5\}$; 2) $\vec{a} \{3; -1\}$, $\vec{b} \{4; -5\}$;

б) Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} \{2; 3\}$ и $\vec{b} \{-3; -2\}$.

110

а) Докажите, что векторы $\vec{a} \{x; y\}$ и $\vec{b} \{-y; x\}$ перпендикулярны.

б) Докажите, что векторы $\vec{a} \{2; -3\}$ и $\vec{b} \{-3; -2\}$ перпендикулярны.

111

При каком значении m векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если:

- а) $\vec{a} \{2; 3\}$, $\vec{b} \{-4; m\}$; б) $\vec{a} \{m; -1\}$, $\vec{b} \{2; 3\}$;
 в) $\vec{a} \{2; 0\}$, $\vec{b} \{m; 4\}$; г) $\vec{a} \{-3; -1\}$, $\vec{b} \{0; m\}$?

112

а) Можно ли, зная скалярные произведения ненулевых векторов, определить вид угла между этими векторами?

б) Определите вид угла между векторами, если скалярное произведение:

- 1) положительно; 2) равно 0; 3) отрицательно.

113

а) При каких значениях x векторы $\vec{a} \{x; -2\}$ и $\vec{b} \{2x; 16\}$ перпендикулярны?

б) При каких значениях m угол между векторами $\vec{a} \{3; 2\}$ и $\vec{b} \{5; m\}$ будет острым? тупым?

114

Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

115

а) Вычислите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$, если: а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$;

б) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$.

116

Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$,

если: а) $\vec{a} \{2; -1\}$, $\vec{b} \{-3; 1\}$, $\vec{c} \{1; -4\}$; б) $\vec{a} \{3; 0\}$, $\vec{b} \{-1; 2\}$, $\vec{c} \{4; 1\}$.

117

Докажите равенства: а) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2$; б) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

в) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2a^2 + 2b^2$; г) $(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4ab$.

118

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно неколлинеарны. Чему равен вектор $\vec{m}$, если $\vec{m}\vec{a} = \vec{m}\vec{b} = \vec{m}\vec{c}$?

119

а) Найдите углы треугольника с вершинами: а) $A(1; -\sqrt{3})$, $B(0,5; \sqrt{3})$, $C(-1; \sqrt{3})$.

б) Вычислите косинусы углов треугольника ABC , если $A(2; -3)$, $B(-1; -6)$, $C(-2; 1)$.

120

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным 1. Найдите угол между векторами: а) $\vec{B_1 D_1}$ и $\vec{B_1 D}$; б) $\vec{B_1 D}$ и $\vec{B D_1}$.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. На рисунке 33 прямые a и b параллельны, $\angle 1 = 62^\circ$, $\angle 2 = 42^\circ$. Найдите $\angle 3$.

2. Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ соответственно равны 8 и 11 (рис. 34). На стороне AD отмечена точка M так, что $\angle ABM = 45^\circ$. Найдите CM .

3. Лестницу длиной 2 м прислонили к стене (рис. 35). На какой высоте находится верхний конец лестницы, если её нижний конец отстоит от стены на 0,5 м?

4. а) Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной 4 и углом при основании 30° .

б) Найдите углы параллелограмма, если его стороны равны 4 и 12, а площадь — 24.

5. Найдите радиус вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами длиной 16, 25, 39.

6. Основание равнобедренного треугольника равно 12, а проведённая к нему высота — 8. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника.

7. Площадь равнобедренного треугольника равна 48, радиус вписанной в него окружности — 3. Найдите стороны треугольника, если его основание на 2 больше боковой стороны.

8. В треугольнике биссектриса угла, равного 120° , делит противоположную сторону на отрезки длиной 15 и 25. Найдите площадь треугольника.

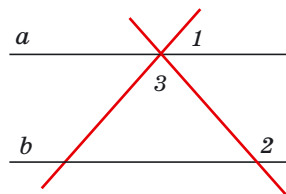


Рис. 33

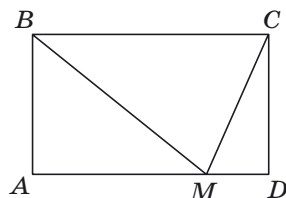


Рис. 34

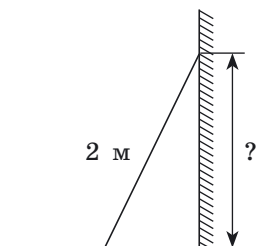


Рис. 35

П. 4.9

К 121

а) Докажите, что диагонали квадрата перпендикулярны и равны.

б) Докажите, что если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

Т 122

а) Докажите, что сумма косинусов двух углов любого треугольника положительна.

б) Докажите, что сумма косинусов двух острых углов прямоугольного треугольника больше 1.

Т 123

В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$. Докажите, что его медианы AK и CM перпендикулярны.

К Т 124

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$, вершины которого $A(-1; 2)$, $B(1; -2)$, $C(2; 0)$, $D(1; 6)$, — трапеция.

б) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$, вершины которого $A(1; -1)$, $B(2; 1)$, $C(4; 0)$, $D(3; -2)$, является прямоугольником.

К Т 125

а) Четырёхугольник $ABCD$ — трапеция с основанием AD . Докажите, что $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{DC}$.

б) Известно, что диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что $\vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{CB} \cdot \vec{CD} = AB^2 - CB^2$.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

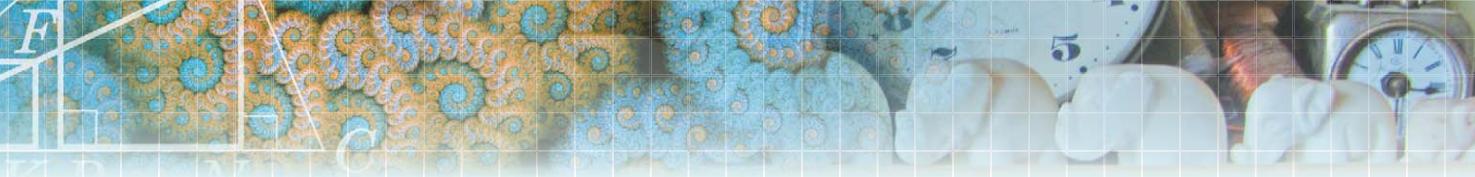
1. а) Диагонали выпуклого четырёхугольника равны 4 см и 6 см, а угол между ними — 30° . Найдите площадь четырёхугольника.

б) Найдите площадь ромба со стороной $5\sqrt{3}$ и углом 120° .

2. Стороны правильного треугольника ABC равны 18. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
3. а) Найдите периметр прямоугольного участка земли, площадь которого равна 1200 м^2 , а одна сторона в 2 раза больше другой.
б) Пол комнаты прямоугольной формы со сторонами 6 м и 9 м требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 10 см и 20 см. Сколько потребуется ящиков с дощечками, если в одном ящике 50 дощечек?
4. Диаметр автомобильного колеса равен $\frac{100}{\pi}$ см. Сколько оборотов в минуту делает колесо при скорости 60 км/ч?
5. Из точки A окружности проведены две равные хорды AB и AC . Докажите, что диаметр, выходящий из точки A , делит пополам угол, образованный хордами.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Что такое вектор? Как обозначают векторы?
- Какой вектор называют нулевым?
- Какой вектор называют противоположным вектору $\overrightarrow{MN}$?
- Какие векторы называют коллинеарными?
- Что называют длиной вектора? Чему равна длина нулевого вектора?
- Какие векторы называют равными?
- Объясните, какой вектор называют суммой двух векторов. В чём заключается правило треугольника сложения векторов?
- В чём заключается правило параллелограмма сложения векторов?
- Объясните, в чём заключается правило многоугольника сложения векторов.
- Что называют координатами вектора в прямоугольной системе координат? Сформулируйте и докажите теорему о координатах равных векторов.
- Докажите, что от любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.
- Выведите формулу длины вектора через его координаты.
- Объясните, что называют углом между ненулевыми векторами.
- Даны два вектора: $\vec{a}\{x_a; y_a\}$ и $\vec{b}\{x_b; y_b\}$. Как найти координаты вектора $\vec{c}$, равного сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
- Сформулируйте и докажите теорему о свойствах сложения векторов.
- Какой вектор называют произведением данного ненулевого вектора на данное число? Каким свойством это произведение обладает?
- Что называют скалярным произведением двух векторов? Выведите формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты. Какими свойствами обладает скалярное произведение векторов?
- В каком случае скалярное произведение ненулевых векторов положительно? отрицательно? равно 0?
- Объясните, как разложить вектор по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Чему равны коэффициенты такого разложения?



ГЛАВА 5

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

- ДВИЖЕНИЕ
- ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ
- ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС
- ПОВОРОТ
- ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ



ИНТЕРЕСНО

Геометрические преобразования как метод решения задач широко применяются не только в математике, но и в физике, химии, биологии.

5.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют преобразованием фигуры
- Какое преобразование называют движением
- Свойства движения

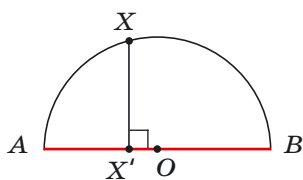


Рис. 5.1

ДВИЖЕНИЕ

С преобразованием фигур мы встречаемся постоянно. Ваша фотография — преобразование пространственной фигуры в плоскую. Изображая куб на листе бумаги, вы также преобразовываете пространственную фигуру в плоскую. Меняя масштаб изображения на экране компьютера, вы преобразовываете плоскость. Готовя презентацию и перетаскивая фигуру с одного места слайда в другое, вы тоже занимаетесь преобразованием плоскости. Что в геометрии называют преобразованием и какие бывают виды преобразований?

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФИГУРЫ Любая геометрическая фигура представляет собой некоторое множество точек. Если каждую точку данной фигуры F каким-то образом сместить, то мы получим новую фигуру F' . В этом случае говорят, что фигура F' получена преобразованием из данной фигуры F .

Рассмотрим такой пример. Пусть дана полуокружность с центром O и диаметром AB (рис. 5.1).

Из произвольной точки X полуокружности опустим перпендикуляр на прямую AB . Каждой точке X полуокружности будет соответствовать точка X' — основание перпендикуляра, опущенного из точки X на AB . В силу единственности перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной прямой, каждой точке полуокружности будет соответствовать единственная точка диаметра AB , и наоборот.

Кроме того, разным точкам полуокружности соответствуют разные точки диаметра AB (точки A и B , принадлежащие и диаметру, и полуокружности, соответствуют самим себе).

В таком случае говорят, что установленное соответствие является преобразованием полуокружности в диаметр.

Вот ещё два примера преобразования фигур.

Вы уже умеете строить фигуру F' , симметричную данной фигуре F относительно прямой (рис. 5.2) и относительно точки (рис. 5.3).

В каждом из этих примеров каждой точке X фигуры F ставится в соответствие по определённому пра-

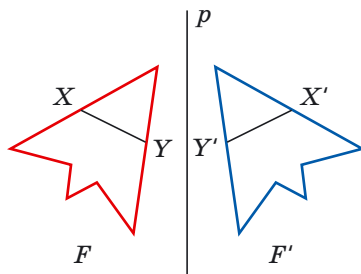


Рис. 5.2

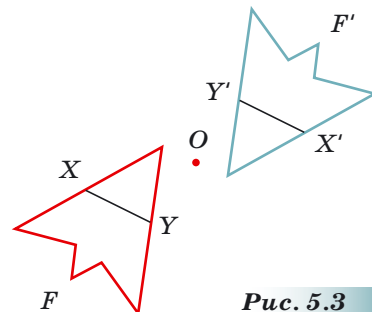


Рис. 5.3

вину единственная точка X' фигуры F' , и наоборот, причём различным точкам фигуры F ставятся в соответствие различные точки фигуры F' .

Итак, будем говорить, что задано преобразование фигуры F в фигуру F' , если указан способ, с помощью которого каждой точке X фигуры F ставится в соответствие точка X' фигуры F' и при этом различным точкам X и Y фигуры F соответствуют различные точки X' и Y' фигуры F' .

Среди множества видов преобразований фигур есть такие, которые не сохраняют расстояние между точками (как при преобразовании полуокружности в диаметр), а есть такие, как, например, осевая симметрия, которые сохраняют расстояние между точками.

Самыми важными среди различных преобразований фигур являются те, при которых сохраняются все геометрические свойства фигуры: расстояние между точками, углы, параллельность отрезков, площадь, объём... Оказывается, для этого достаточно потребовать только сохранения расстояния между точками данной фигуры. Тогда у полученной фигуры сохраняются и все остальные свойства, так как они зависят только от расстояний.

Рассмотрим преобразования, сохраняющие расстояние между точками.

ДВИЖЕНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Преобразование одной фигуры в другую называется **движением**, если оно сохраняет расстояние между точками, то есть переводит любые две точки X и Y одной фигуры в точки X' и Y' другой фигуры так, что $|XY| = |X'Y'|$ (рис. 5.4).

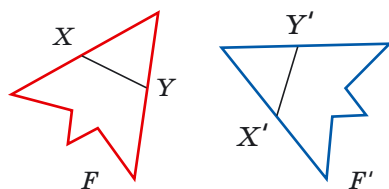


Рис. 5.4

Понятие движения связано с перемещением фигур, но, в отличие от физики, в геометрии нас интересует не процесс перемещения, а только начальное и конечное положения фигуры, то есть в геометрическом понятии движения учитывается только сопоставление одного положения фигуры с другим.

Пусть при движении произвольная точка X фигуры F переходит в точку X' фигуры F' . Преобразование фигуры F' в фигуру F , при котором точка X' переходит в точку X , называется преобразованием, обратным данному.

Очевидно, что преобразование, обратное движению, также является движением.

Слово «движение» обычно связывается с реальным движением тел, когда тело меняет своё положение в пространстве. В геометрии движение — это отвлечённый образ реальных движений. Геометрическую фигуру нельзя передвинуть в буквальном смысле слова, как нельзя передвинуть рисунок на бумаге: можно передвинуть саму бумагу, но не рисунок на ней.

Результат применения двух последовательных преобразований f и g фигуры называют композицией преобразований. Так, последовательное выполнение двух движений называют композицией движений.

СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ Рассмотрим два последовательных движения.

Пусть фигура F переводится движением в фигуру F' , а фигура F' переводится движением в фигуру F'' .

Рассмотрим две любые различные точки X и Y фигуры F , переходящие после первого движения соответственно в точки X' и Y' фигуры F' . Пусть точки X' и Y' в результате второго движения переходят соответственно в точки X'' и Y'' фигуры F'' . Так как $XY = X'Y' = X''Y''$ (рис. 5.5), то преобразование фигуры F в фигуру F'' сохраняет расстояние между точками, а значит, также является движением.

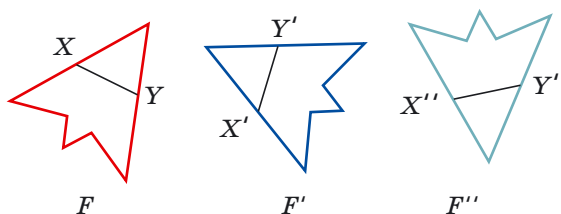


Рис. 5.5

Итак, преобразование движения обладает таким свойством:

результатом двух последовательных движений является движение.

Рассмотрим другие свойства движения.

ТЕОРЕМА. Движение переводит точки, лежащие на прямой, в точки, лежащие на прямой, при этом сохраняя порядок их взаимного расположения.

Доказательство. Пусть точки A , B и C , лежащие на прямой, при движении переходят соответственно в точки A' , B' , C' и точка B лежит между точками A и C (рис. 5.6).

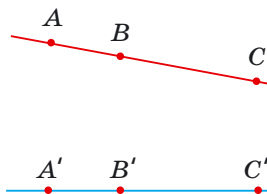


Рис. 5.6

Докажем, что точки A' , B' и C' лежат на одной прямой и при этом точка B' лежит между точками A' и C' .

Так как точка B лежит на прямой между точками A и C , то

$$AC = AB + BC.$$

Так как расстояния при движении сохраняются, то и для точек A' , B' и C' будет выполняться равенство $A'C' = A'B' + B'C'$, а это означает, что точка B' лежит между точками A' и C' . ▼

СЛЕДСТВИЕ. При движении прямые переходят в прямые, лучи переходят в лучи, отрезки — в отрезки (рис. 5.7).

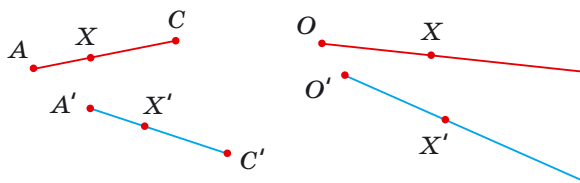


Рис. 5.7

Докажите это следствие самостоятельно.
Вот ещё одно свойство движения.

ТЕОРЕМА. При движении угол переходит в равный ему угол.

Доказательство. Пусть OA и OB — два луча, исходящие из одной точки O и не лежащие на одной прямой.

При движении эти лучи переходят в некоторые лучи $O'A'$ и $O'B'$ (рис. 5.8).

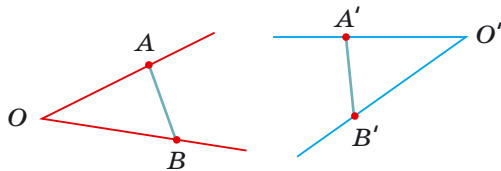


Рис. 5.8

Так как движение сохраняет расстояния, то треугольники OAB и $O'A'B'$ равны по третьему признаку равенства треугольников.

Из равенства треугольников следует, что $\angle AOB = \angle A'O'B'$. ▼

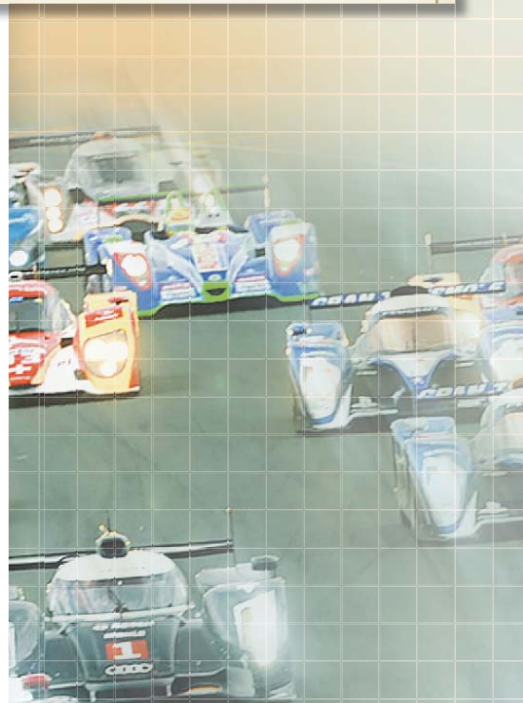
Свойства движения приводят нас к следующему определению равенства фигур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две фигуры называют равными, если существует движение, при котором одна из данных фигур переходит в другую.

Записывают это так: $F = F'$.

На практике сравнивают геометрически фигуры, тоже сравнивая в них соответствующие расстояния. Только обычно говорят не о расстояниях, а о каких-то размерах фигуры. При этом никто не сравнивает фигуры так, чтобы каждой точке одной фигуры сопоставлять точку другой фигуры. Сравнивают только те размеры фигуры, которые её однозначно задают. Например, у окружностей только радиусы, у треугольников — длины сторон, у четырёхугольников — длины сторон и диагоналей. В произвольной фигуре неизвестно, расстояния между какими точками можно считать определяющими однозначно эти фигуры, поэтому в общем определении равенства фигур говорится о движении.

В механике рассматривают движение твёрдых или абсолютно твёрдых тел, то есть тел, не допускающих деформаций, или, по-другому, сохраняющих расстояние между его частицами — точками. Поэтому, если при движении твёрдого тела две его точки X и Y перешли в точки X_1 и Y_1 , то расстояния сохраняются: $|XY| = |X_1Y_1|$, то есть происходит движение, как мы его определили геометрически.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Объясните, что такое преобразование фигуры. Приведите примеры преобразования фигур.
- Какое преобразование называется движением?
- Какими свойствами обладает движение?
- Может ли движение переводить: а) один из углов при основании равнобедренного треугольника в другой; б) одно из оснований трапеции в другое?

5.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют осевой симметрией плоскости
- Что осевая симметрия является движением

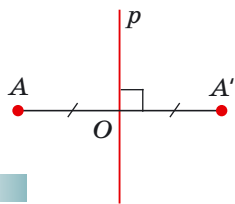


Рис. 5.9

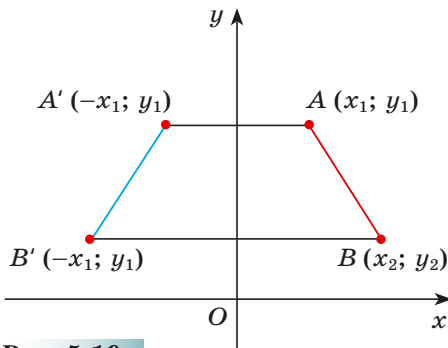


Рис. 5.10

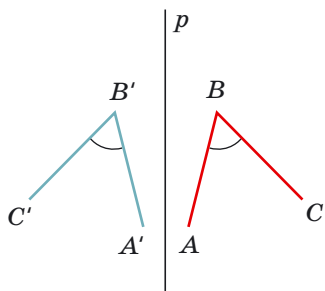


Рис. 5.11

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

С осевой симметрией вы знакомы. Выясним, каким преобразованием является осевая симметрия.

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ ПЛОСКОСТИ Напомним, что две точки A и A' симметричны относительно прямой p , если $AA' \perp p$ и $AO = A'O$ (рис. 5.9). Точки прямой p симметричны сами себе.

Пусть p — данная прямая. Каждой точке X сопоставим симметричную ей относительно прямой p точку X' .

В результате каждой точке X плоскости будет сопоставлена некоторая точка X' и каждая точка X' окажется сопоставленной некоторой точке X , то есть будет задано отображение плоскости на себя.

Такое преобразование плоскости называют **осевой симметрией плоскости**, а прямую p называют осью симметрии.

ТЕОРЕМА. Осевая симметрия плоскости является движением.

Доказательство. Воспользуемся методом координат. Введём декартову систему координат так, чтобы ось симметрии p была осью Oy .

Отметим две произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ (рис. 5.10).

У симметричных им относительно оси Oy точек ординаты будут те же, а абсциссы противоположны. Выразив расстояния AB и $A'B'$ через координаты, получим:

$$\begin{aligned} A'B' &= \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \\ AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, осевая симметрия сохраняет расстояние между точками, то есть осевая симметрия является движением. ▼

СЛЕДСТВИЕ. Если фигуры F и F' симметричны относительно прямой, то $F = F'$.

Так как осевая симметрия является движением, то при осевой симметрии прямая отображается в прямую, луч — в луч, отрезок — в равный ему отрезок, угол — в равный ему угол.

Рассмотрим рисунок 5.11, на котором изображён угол ABC и симметричный ему относительно прямой p угол $A'B'C'$. Рассмотрим $\angle ABC$. Поворот вокруг точки B от BC к BA совершается по часовой стрелке.

Рассмотрим угол $A'B'C'$. Поворот вокруг точки B' от $B'C'$ к $B'A'$ совершается против часовой стрелки.

Таким образом, осевая симметрия сохраняет величину угла, но меняет его ориентацию.

ФИГУРЫ, ОБЛАДАЮЩИЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ Вы знаете, что есть фигуры, имеющие ось симметрии.

Напомним, что фигуру F называют симметричной относительно прямой p , если для каждой точки X данной фигуры точка X' , симметричная точке X относительно прямой p , также принадлежит этой фигуре. Прямую p называют осью симметрии фигуры F .

Фигура может иметь одну ось симметрии, как, например, равнобедренный треугольник или угол (рис. 5.12).

Фигура может иметь и две оси симметрии, как прямоугольник или ромб (рис. 5.13).

Фигура может иметь и три оси симметрии, как, например, равносторонний треугольник (рис. 5.14).

Четыре оси симметрии имеет квадрат (рис. 5.15).

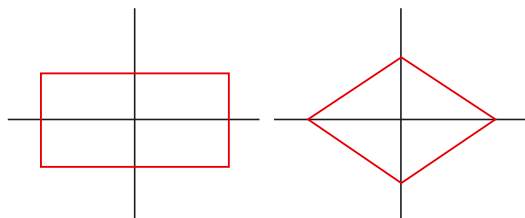


Рис. 5.13

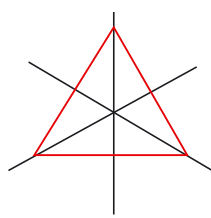


Рис. 5.14

Есть фигуры, имеющие бесконечно много осей симметрии, например окружность.

Бесконечно много осей симметрии имеет прямая (рис. 5.16): любая прямая, перпендикулярная ей, и сама прямая являются её осями симметрии.

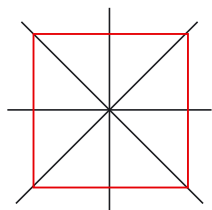


Рис. 5.15

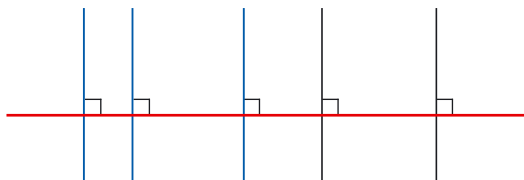


Рис. 5.16

Симметрию мы видим не только в геометрических фигурах. Окружающий нас мир во многом симметричен: симметричны тела человека и животных, листья и цветы растений, снежинки и т. д.

И созданное человеком тоже чаще всего симметрично: здания и мебель, посуда, средства передвижения — от самолёта до скейта и самоката, предметы украшения.

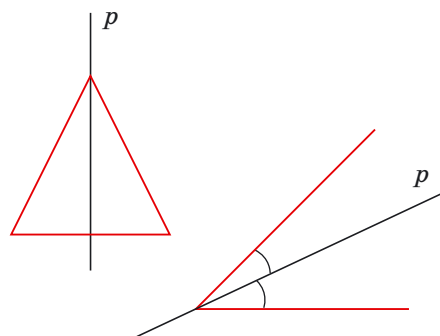


Рис. 5.12

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какие точки называют симметричными относительно прямой p ?
- Какое отображение плоскости на себя называют осевой симметрией? Какая прямая при этом называется осью симметрии?
- Докажите, что осевая симметрия является движением.
- Что значит: осевая симметрия сохраняет величину угла, но меняет его ориентацию?
- Что значит: фигура обладает осевой симметрией?
- Приведите примеры архитектурных сооружений, обладающих осевой симметрией.
- Обладает ли осевой симметрией фасад вашего школьного здания?
- Учитель попросил поставить парты в классе симметрично. Как вы это понимаете?
- Изобразите по две какие-нибудь фигуры, имеющие:
 - а) одну ось симметрии;
 - б) две оси симметрии;
 - в) три оси симметрии;
 - г) пять осей симметрии.

5.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

● Какое преобразование плоскости называется параллельным переносом

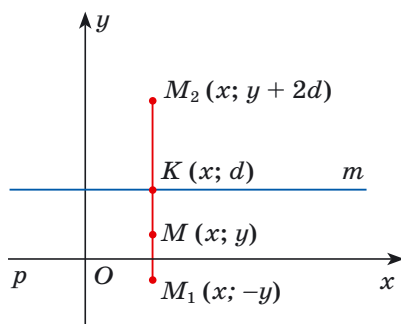


Рис. 5.17

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Рассмотрим ещё один вид движения.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС Вы уже знаете, что результатом двух движений является движение. Выясним, какое движение получается в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий с осями p и m .

Возможны два случая взаимного расположения прямых p и m : 1) $p \parallel m$ и 2) p и m пересекаются.

Рассмотрим первый случай: $p \parallel m$.

Введём декартову систему координат таким образом, чтобы ось абсцисс совпала с прямой p , а прямая m , параллельная оси абсцисс, имела уравнение $y = d$, где d равно расстоянию между прямыми p и m .

Рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$ плоскости. При симметрии относительно прямой p она перейдёт в точку $M_1(x; -y)$ (рис. 5.17).

Точка M_1 при симметрии относительно прямой m перейдёт в такую точку M_2 , что прямая m окажется серединным перпендикуляром к отрезку M_1M_2 . Середина отрезка M_1M_2 — точка K — имеет координаты $(x; d)$. Тогда точка M_2 будет иметь координаты $(x; y + 2d)$.

Таким образом, в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий произвольная точка плоскости $M(x; y)$ перешла в точку $M_2(x; y + 2d)$, то есть в такую точку M_2 , что вектор $\overrightarrow{MM_2}$ имеет координаты $\{0; 2d\}$. Этот вектор перпендикулярен осям p и m , а длина вектора равна удвоенному расстоянию между осями симметрии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M переходит в такую точку M_2 , что вектор $\overrightarrow{MM_2}$ равен данному вектору $\vec{a}$, называется **параллельным переносом на вектор $\vec{a}$** . Вектор $\vec{a}$ называют вектором параллельного переноса.

Если взять любые две прямые, перпендикулярные вектору $\vec{a}$, расстояние между которыми равно $\frac{1}{2}|\vec{a}|$, и выполнить в соответствующем порядке относительно этих прямых осевые симметрии, мы получим параллельный перенос на вектор $\vec{a}$.

Параллельный перенос задаётся формулами:

$$x' = x + c; \quad y' = y + b.$$

Эти формулы выражают координаты x' и y' точки X' , в которую переходит точка $X(x; y)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a} \{c; b\}$.

Покажем с помощью координатного метода, что *параллельный перенос является движением*.

Действительно, две произвольные точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ переходят при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\{c; b\}$ в точки $A'(x_1 + c; y_1 + b)$ и $B'(x_2 + c; y_2 + b)$. Тогда

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \\ A'B' &= \sqrt{((x_2 + c) - (x_1 + c))^2 + ((y_2 + b) - (y_1 + b))^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 + c - x_1 - c)^2 + (y_2 + b - y_1 - b)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \end{aligned}$$

то есть $AB = A'B'$. Значит, параллельный перенос сохраняет расстояние между точками. Следовательно, параллельный перенос является движением.

При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

Прямая при параллельном переносе переходит в параллельную ей прямую или в себя (рис. 5.18).

Очевидно, что параллельные переносы на векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ являются взаимно-обратными преобразованиями.

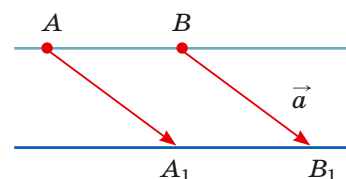
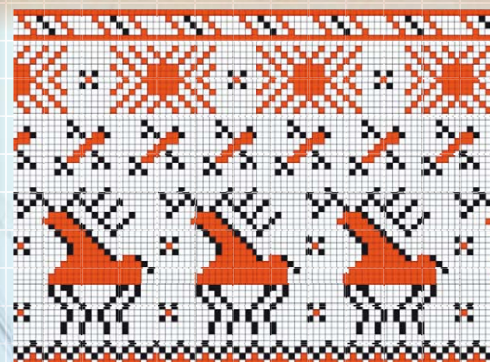


Рис. 5.18

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что получается в результате двух последовательных осевых симметрий?
- Какое преобразование называют параллельным переносом?
- Докажите, что параллельный перенос является движением.
- Сформулируйте свойства параллельного переноса.
- Существует ли параллельный перенос, при котором:
 - а) одна из сторон прямоугольника переходит в другую;
 - б) одна диагональ прямоугольника переходит в другую?
- Какое преобразование плоскости получится при последовательном применении двух параллельных переносов на векторы $\vec{a}\{x_a; y_a\}$ и $\vec{b}\{x_b; y_b\}$?
- Точка $A(2; -1)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ перешла в точку $A'(-3; -2)$. Чему равны координаты вектора $\vec{a}$?



Задача. При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точка $A(-1; 2)$ перешла в точку $A'(-2; 3)$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$ и координаты точки B' , в которую перейдёт при этом преобразовании точка $B(-7; -3)$.

Решение. Из условия следует, что $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, отсюда $\vec{a}\{-2 + 1; 3 - 2\}$, то есть $\vec{a}\{-1; 1\}$.

Пусть координаты точки B' равны $(x; y)$.

$$\overrightarrow{BB'} = \vec{a}, \text{ тогда}$$

$$x + 7 = -1;$$

$$y + 3 = 1.$$

Отсюда $x = -8$, $y = -2$. Итак: $B'(-8; -2)$.

Ответ: $\vec{a}\{-1; 1\}$, $B'(-8; -2)$.

Параллельный перенос является движением, поэтому при параллельном переносе фигуры F в фигуру F' выполняется равенство $F' = F$.

Это свойство широко используется в различных видах деятельности человека: при рукоделии, в архитектуре, технике и т. д.

5.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какое преобразование плоскости называется поворотом
- Что центральная симметрия — частный случай поворота

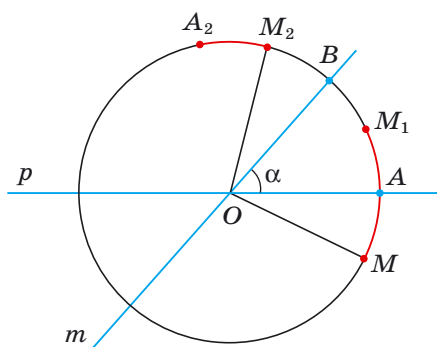


Рис. 5.19

ПОВОРОТ

В предыдущем пункте мы выяснили, какое получится преобразование плоскости в результате двух последовательных симметрий с параллельными осями. А что получится, если оси не параллельны?

ПОВОРОТ Рассмотрим две последовательные симметрии относительно пересекающихся прямых p и m .

Пусть прямые p и m пересекаются в точке O и угол между прямыми равен α .

Отметим на плоскости произвольную точку M , отличную от O , и рассмотрим окружность с центром в точке O и радиусом OM . Эта окружность пересекает оси p и m в четырёх точках (рис. 5.19).

Выберем две из этих точек: точку A на прямой p и точку B на прямой m . Эти две точки определяют направление движения на окружности: от точки A к точке B по малой дуге AB , соответствующей углу α .

После первой симметрии относительно прямой p точка A останется на месте, дуга MA перейдёт в дугу AM_1 , равную дуге MA , но противоположно направленную.

После второй симметрии дуга MA переходит в равную ей и так же направленную дугу M_2A_2 . Значит, $\angle MOM_2 = \angle AOA_2 = 2\alpha$, причём точки M и M_2 следуют друг за другом в том же порядке, что и точки A и A_2 .

Таким образом, в результате последовательного применения симметрий относительно пересекающихся прямых p и m точка M окружности перейдёт в точку M_2 этой же окружности. Точка O остаётся на месте.

Следует обратить внимание на то, что, как бы мы ни провели через точку O пересекающиеся под углом α прямые, после двух последовательных симметрий относительно этих прямых мы получим поворот в соответствующем направлении на угол 2α вокруг точки O .

Это движение называется **поворотом вокруг точки O на угол, равный 2α** . При этом направление поворота то же, что и у поворота на угол α , переводящего прямую p в прямую m .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поворотом плоскости с центром в точке O на угол α в данном направлении называют такое преобразование плоскости, при котором каждой точке X , отличной от O , соответствует такая точка X' , что:

- 1) $|OX| = |OX'|$;
- 2) $\angle XOX' = \alpha$;
- 3) угол XOX' откладывается от луча OX в заданном направлении (рис. 5.20).

Угол α называют углом поворота, точку O — центром поворота. Поворот с центром в точке O называют также поворотом вокруг точки O .

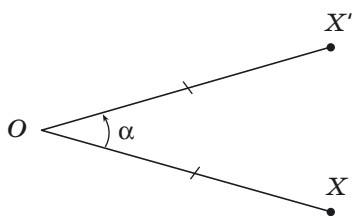


Рис. 5.20

Поворот является движением.

Докажите это самостоятельно.

Примеры поворота дают стрелки часов или других приборов. Стрелки приборов могут двигаться как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ Рассмотрим случай, когда угол поворота $\alpha = 90^\circ$.

Тогда в результате двух последовательных осевых симметрий получится поворот вокруг точки O на 180° , то есть движение, сопоставляющее каждой точке X плоскости точку X' , симметричную точке X относительно точки O .

Такое движение называется **центральной симметрией**, а точка O — **центром симметрии** (рис. 5.21).

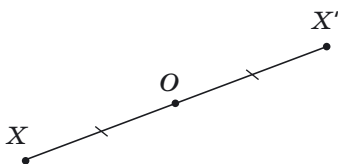


Рис. 5.21

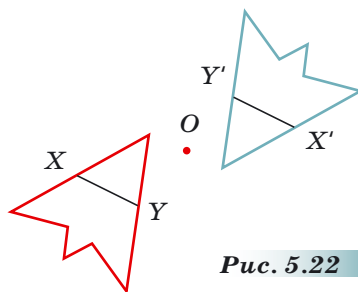


Рис. 5.22

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две фигуры F и F' называют **центрально-симметричными** относительно центра O , если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей точка другой фигуры (рис. 5.22).

Как вы знаете, существуют фигуры, имеющие центр симметрии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фигуру F называют **центрально-симметричной** относительно центра O , если она симметрична сама себе.

Например, параллелограмм является центрально-симметричной фигурой (рис. 5.23).

Есть фигуры, обладающие и центральной, и осевой симметрией, например квадрат, окружность (рис. 5.24).

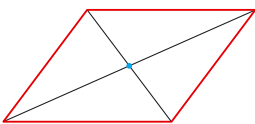


Рис. 5.23

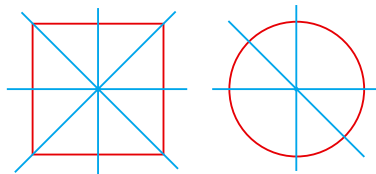


Рис. 5.24

Изучая окружающий мир, мы постоянно сталкиваемся с симметрией. Объекты, обладающие симметрией, радуют глаз, легко воспринимаются. Ещё в Древней Греции слово «симметрия» служило синонимом слов «гармония», «красота».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какое преобразование получится в результате двух последовательных симметрий относительно пересекающихся прямых?
- Докажите, что поворот является движением.
- Какие фигуры называются симметричными относительно точки O ?
- Приведите пример центрально-симметричной фигуры.
- Докажите, что центральная симметрия является поворотом на 180° .
- Нарисуйте фигуру, обладающую:
 - а) центральной симметрией;
 - б) двумя видами симметрии.



5.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют преобразованием подобия
- Какие фигуры называют подобными
- Что такое гомотетия

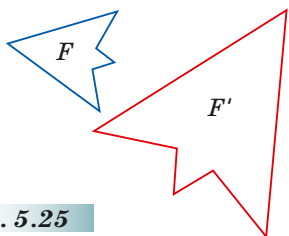


Рис. 5.25



Рис. 5.26

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

Рассмотрим ещё один класс преобразований, часто используемых в геометрии.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ Выведите на экран компьютера какую-нибудь фотографию и увеличьте её изображение с помощью масштабирования в 1,5 раза. При этом расстояние между двумя любыми точками изображения увеличится также в 1,5 раза. Если же вы уменьшите изображение в 2 раза, то и расстояние между любыми двумя точками данного изображения уменьшится в 2 раза.

Каждый раз, когда вы увеличиваете или уменьшаете изображение, происходит преобразование подобия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Преобразованием подобия с коэффициентом $k > 0$ называют отображение плоскости на себя, при котором любые две точки X и Y плоскости переходят в такие точки X' и Y' , что

$$|X'Y'| = k |XY|. \quad (1)$$

Число k называют при этом коэффициентом подобия.

Подобие является взаимно однозначным преобразованием.

Действительно, пусть X и Y — различные точки, тогда $|XY| > 0$. Так как $k > 0$, то из равенства (1) следует, что $|X'Y'| > 0$, то есть точки X' и Y' тоже различны.

При $k = 1$ имеем: $|XY| = |X'Y'|$, то есть расстояние между точками сохраняется, значит, при $k = 1$ подобие является движением.

Таким образом, движение — частный случай подобия с коэффициентом $k = 1$.

Два преобразования подобия с коэффициентом k и $\frac{1}{k}$ являются взаимно-обратными. Это означает, что если одно из них переводит точку X в точку X' , то другое переводит точку X' в точку X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две фигуры F и F' называются подобными, если существует такое преобразование подобия с коэффициентом k , при котором одна из фигур переходит в другую.

Подобие фигур обозначают так: $F \sim F'$.

На рисунке 5.25 фигуры F и F' подобны с коэффициентом $k = 2$.

Две географические карты одной и той же местности, выполненные в разных масштабах, подобны (рис. 5.26, а — 1 : 6 000 000, 5.26, б — 1 : 3 000 000).

Примерами подобных фигур являются две окружности, два квадрата, два равносторонних треугольника (рис. 5.27).

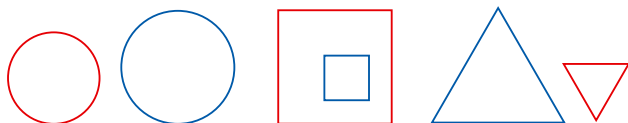


Рис. 5.27

СВОЙСТВА ПОДОБИЯ Рассмотрим некоторые свойства подобия.

Свойство 1. Подобие переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство. Пусть точка M принадлежит отрезку AB , тогда

$$AM + MB = AB.$$

Подобие переводит точки A , M и B в точки A' , M' и B' соответственно. Поскольку при подобии расстояния между точками умножаются на одно и то же число, то для точек A' , M' и B' будет иметь место равенство

$$A'M' + M'B' = A'B'.$$

То есть точка M' принадлежит отрезку $A'B'$.

Значит, подобие переводит отрезок в отрезок, а следовательно, и луч в луч, и прямую в прямую. ▼

При изучении геометрии вы уже встречались с подобием, рассматривая подобные треугольники, и знакомы с признаками подобия треугольников. Рассмотрим, к примеру, третий признак подобия треугольников.

Опираясь на определение подобных фигур, докажем, что два треугольника подобны, если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника.

Действительно, пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, то есть $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$. Значит, существует такое преобразование подобия с коэффициентом k , которое переводит отрезки AB в A_1B_1 , BC в B_1C_1 , AC в A_1C_1 , а значит, и треугольник ABC перейдёт в треугольник $A_1B_1C_1$.

Из определения подобных фигур следует, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Свойство 2. Подобие сохраняет величины углов.

Доказательство. Пусть угол с вершиной A и сторонами m и n переводится подобием в угол A' со сторонами m' и n' (рис. 5.28). Докажем, что $\angle A = \angle A'$.

Возьмём на сторонах m и n точки B и C , и пусть B' и C' — соответствующие им точки на сторонах m' и n' . Тогда треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны по трём сторонам. Следовательно, соответственные углы равны, то есть $\angle A = \angle A'$. ▼

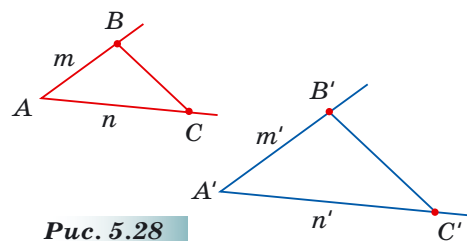
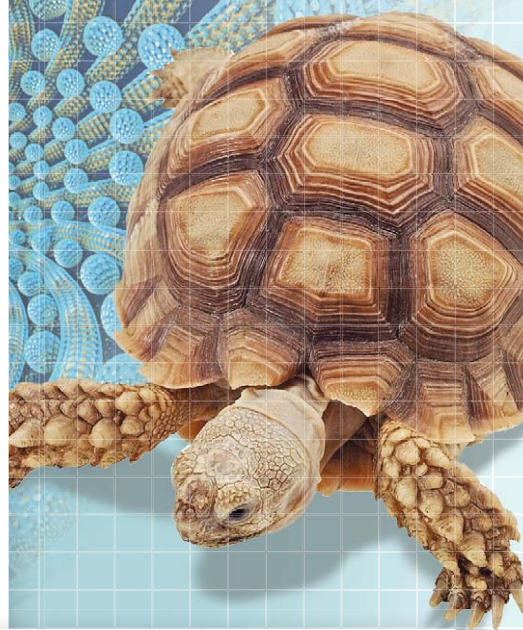


Рис. 5.28



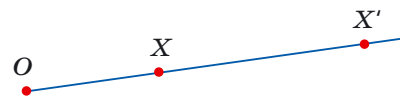


Рис. 5.29

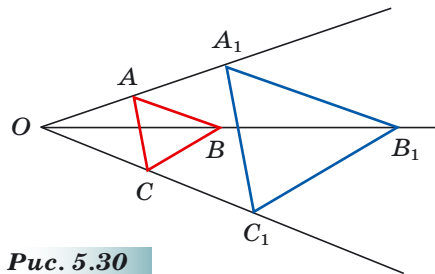


Рис. 5.30

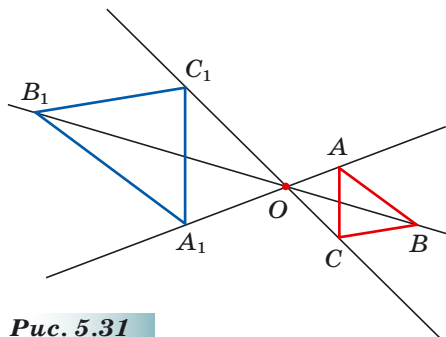


Рис. 5.31

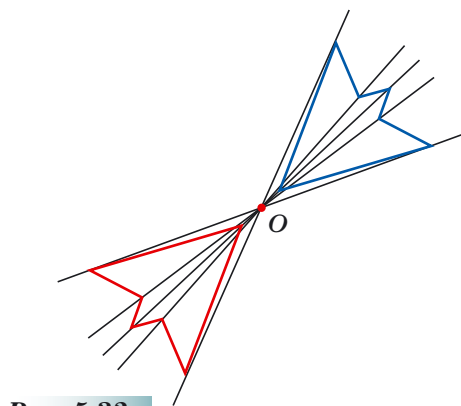


Рис. 5.32

ГОМОТЕТИЯ Рассмотрим следующее преобразование плоскости.

Возьмём точку O и число $k > 0$. Каждой точке X плоскости поставим в соответствие точку X' на луче OX такую, что $OX' = kOX$ (рис. 5.29). Точка O соответствует сама себе.

Полученное преобразование плоскости называется гомотетией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k называют такое преобразование плоскости, при котором любая точка X переходит в точку X' такую, что $OX' = kOX$.

На рисунке 5.30 треугольник $A_1B_1C_1$ получен гомотетией из треугольника ABC . В этом случае говорят, что треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC с центром O и коэффициентом $k = 2$.

Также можно сказать, что треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с тем же центром и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$.

А на рисунке 5.31 треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC с центром в точке O и коэффициентом $k = -2$.

Из определения гомотетии следует, что при $k = 1$ гомотетия является тождественным преобразованием.

При $k = -1$ гомотетия является центральной симметрией (рис. 5.32).



Задача. В данный остроугольный треугольник ABC вписать квадрат так, чтобы две вершины квадрата лежали на стороне AC и ещё по одной — на сторонах AB и BC .

Решение.

1. Возьмём на стороне AB треугольника ABC произвольную точку D , опустим перпендикуляр DE на сторону AC и построим квадрат $EDFK$, стороной которого является DE , а точки E и K принадлежат AC (рис. 1).

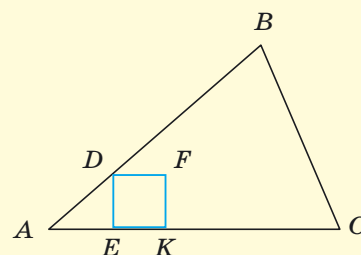


Рис. 1

Продолжение решения задачи

2. Проведём прямую AF и обозначим точку пересечения прямой AF и стороны BC через M (рис. 2). Из точки M опустим перпендикуляр MN на AC .

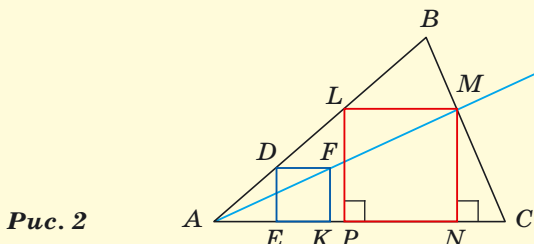


Рис. 2

3. Построенный квадрат $PLMN$ получается из квадрата $EDFK$ при гомотетии с центром в точке A . Рассмотрим гомотетию с центром в точке A и $k = \frac{AM}{AF}$.

При этой гомотетии точка F переходит в точку M . А так как при гомотетии любой отрезок переходит в отрезок, длиной в k раз больший исходного, и сохраняются величины углов, то квадрат $EDFK$ переходит в квадрат, одной из вершин которого будет точка M , ещё две вершины будут лежать на стороне AC , а четвёртая вершина будет лежать на луче AB , то есть квадрат $EDFK$ переходит в квадрат $PLMN$. Таким образом, точка L лежит на стороне AB . Квадрат $PLMN$ — искомый.

ТЕОРЕМА* (основное свойство геометрии). При гомотетии с коэффициентом k каждый вектор умножается на k .

Доказательство. Пусть точки X и Y при гомотетии с коэффициентом k и центром O перешли в точки X' и Y' (рис. 5.33). Докажем, что $\overrightarrow{X'Y'} = k \overrightarrow{XY}$.

Имеем:

$$\overrightarrow{OX'} = k \overrightarrow{OX}; \overrightarrow{OY'} = k \overrightarrow{OY}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = k \overrightarrow{OY} - k \overrightarrow{OX} = k (\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}) = k \overrightarrow{XY}. \quad \blacktriangledown$$

Из доказанного выше следует, что гомотетичные отрезки или параллельны, или лежат на одной прямой.

Также из равенства $\overrightarrow{X'Y'} = k \overrightarrow{XY}$ следует, что

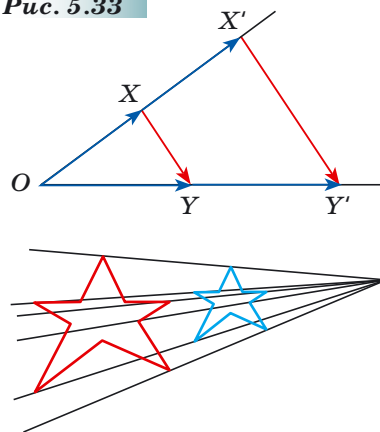
$$|\overrightarrow{X'Y'}| = |k| |\overrightarrow{XY}|, \text{ то есть}$$

гомотетия с коэффициентом k является подобием с коэффициентом $|k|$. $\blacktriangledown$

ТЕОРЕМА. Любое преобразование подобия с коэффициентом k можно представить как композицию гомотетии с коэффициентом k и движения.

Доказательство этой теоремы представлено в тетради-тренажёре.

Рис. 5.33



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют преобразованием подобия?
- Что такое коэффициент подобия?
- Какие фигуры называют подобными? Приведите примеры подобных фигур.
- Сформулируйте свойства подобия.
- Что называют гомотетией?
- Какие фигуры называют гомотетичными?
- Сформулируйте основное свойство гомотетии.
- Докажите, что у гомотетичных треугольников соответствующие стороны или параллельны, или лежат на одной прямой.
- Верно ли, что:
 - а) любые две гомотетичные фигуры подобны;
 - б) любые две подобные фигуры гомотетичны?
- Можно ли считать равные фигуры подобными?
- Подобны ли ромб с углом 60° и ромб с диагональю, равной стороне?
- MN — средняя линия треугольника ABC . Являются ли гомотетичными треугольники ABC и MBN ? Если да, то укажите центр и коэффициент гомотетии.
- Докажите, что отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

П. 5.1

1

Могут ли при движении две различные точки переходить в одну?

К 2

Может ли движение переводить: а) сторону параллелограмма в противоположную ей сторону параллелограмма; б) сторону треугольника в его среднюю линию; в) один угол равностороннего треугольника в другой?

К 3

Точки A , B и C не лежат на одной прямой и при движении переходят в точки A' , B' и C' соответственно. Докажите равенство треугольников ABC и $A'B'C'$.

К 4

Докажите, что при движении: а) параллельные прямые переходят в параллельные прямые; б) окружность переходит в окружность того же радиуса.

К Т 5

а) Движение переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$. Докажите, что середина отрезка AB — точка M — перейдёт в точку M' отрезка $A'B'$.

б) Движение переводит угол AOB в угол $A'O'B'$. Докажите, что биссектриса OD угла AOB перейдёт в биссектрису $O'D'$ угла $A'O'B'$.

К 6

Докажите, что при движении: а) параллелограмм переходит в параллелограмм; б) ромб переходит в ромб.

Т 7

Движение переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$. Докажите, что при этом биссектрисы, медианы и высоты треугольника ABC перейдут соответственно в биссектрисы, медианы и высоты треугольника $A'B'C'$.

К 8

При движении равнобедренный треугольник с основанием AC переходит в треугольник $A'B'C'$ с основанием $A'C'$. Найдите углы треугольника ABC , если один из углов треугольника $A'B'C'$ равен 110° .

К Т 9

Какие из фигур, изображённых на рисунке 1, равны?

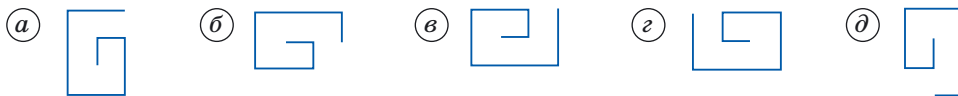


Рис. 1

К Т 10

Движение переводит точки A , B и C в точки A' , B' и C' соответственно.

а) Перенесите рисунок 2, а в тетрадь и постройте точки M' и N' , в которые переходят точки M и N при этом движении.

б) Выполните такое же задание с рисунком 2, б, что и в пункте а).

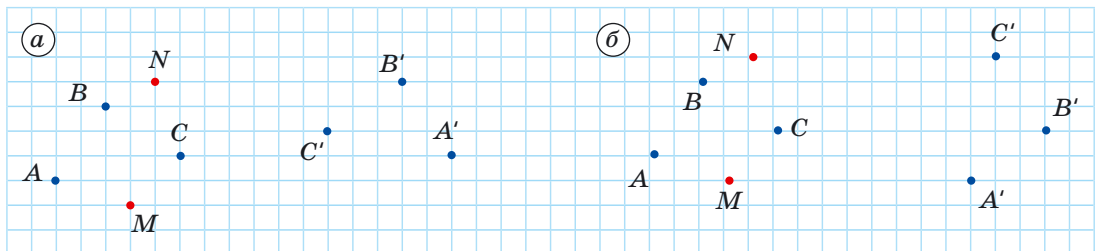


Рис. 2

К 11

а) Докажите, что если у двух выпуклых четырёхугольников соответственно равны все стороны и по одному углу, то такие четырёхугольники равны.

б) С соседом по парте придумайте другие признаки равенства четырёхугольников.

12

С соседом по парте придумайте признаки равенства параллелограммов.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. По рисунку 3 в каждом случае определите коэффициенты k и b и запишите уравнение прямой $y = kx + b$.

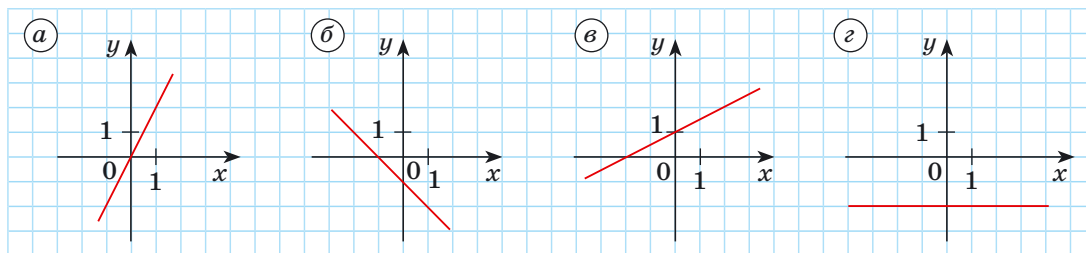


Рис. 3

2. а) Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, и его площадь, если стороны треугольника равны 9, 12 и 15.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с периметром 24 и гипотенузой 10.

3. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O , причём $CO = 12$ и $\angle ACB = 60^\circ$. Найдите расстояние от точки O до прямой AC .

4. а) Серединные перпендикуляры к сторонам равнобедренного треугольника пересекаются в точке O . Найдите расстояние от точки O до середины основания, если боковая сторона равна 10, а один из углов треугольника равен 120° .

б) Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекаются в точке, лежащей на стороне BC . Докажите, что $\angle A = 90^\circ$.

5. Докажите, что сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров вписанной в него и описанной около него окружностей.

6. В четырёхугольнике $ABCD$: $AB = BC$, $CD = DA$. На стороне BC отмечена точка E такая, что $DE = BE$. Докажите, что $DE \parallel AB$.

7. Сторона AB треугольника ABC продолжена на отрезок BD , равный AB , а медиана AM — на отрезок ME , равный AM . Докажите, что $BC = DE$.

П. 5.2

К 13

а) Какие точки при осевой симметрии переходят в себя?

б) Какие прямые при осевой симметрии переходят в себя?

в) Осевая симметрия с осью симметрии p переводит точку A в точку A' . Как расположены прямые p и AA' ?

г) Точка A' симметрична точке A относительно оси p . Верно ли, что точка A симметрична точке A' относительно оси p ?

К 14

а) При симметрии относительно некоторой прямой точка A переходит в точку A' . Как построить точку, в которую при этой симметрии перейдёт точка B ? Отметьте точки A , A' , B и выполните построение точки B' .

- К 15** 1) В прямоугольной системе координат дана точка $M(-3; 2)$. Укажите координаты точки M_1 , симметричной точке M относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат.
2) Найдите точку, симметричную точке $(x; y)$ относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат.
- К 16** а) Даны точки $A(3; -1)$ и $B(0; 2)$. Найдите координаты точек, симметричных данным относительно прямой: 1) делящей пополам I и III координатные углы; 2) делящей пополам II и IV координатные углы.
б) Дана точка $M(x_0; y_0)$. Запишите координаты точки M' , симметричной точке M относительно прямой: 1) $y = x$; 2) $y = -x$.
в) Составьте уравнение прямой, симметричной прямой $y = x$ относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат.
- К 17** а) Докажите, что при осевой симметрии плоскости: 1) прямая, параллельная оси симметрии, отображается на параллельную оси симметрии прямую; 2) прямая, перпендикулярная оси симметрии, отображается сама на себя.
б) Проведите параллельные прямые a и b . Постройте прямую, относительно которой прямая a будет симметрична прямой b .
- К 18** Точки $A(2; 1)$, $B(-4; 3)$ и $C(0; 5)$ являются вершинами треугольника. Запишите координаты вершин треугольника, в который перейдет треугольник ABC при осевой симметрии относительно: а) оси Ox ; б) оси Oy .
- 19** Окружность задана уравнением $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$. Составьте уравнение окружности, симметричной данной относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат. В каком случае окружности касаются друг друга? От чего зависит взаимное расположение симметричных относительно оси координат окружностей?
- К 20** Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B .
а) Обладает ли такая фигура осью симметрии? Если да, укажите ось симметрии и обоснуйте своё утверждение.
б) Как с помощью только циркуля построить окружности, симметричные данным относительно прямой AB ? Постройте эти окружности.

К 21 ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Нарисуйте равносторонний треугольник ABC и постройте треугольник, симметричный данному относительно: а) прямой AB ; б) прямой BC ; в) прямой AC . В каждом случае какую геометрическую фигуру представляет собой объединение симметричных треугольников?
Можно ли движением перевести фигуру, полученную в пункте а), в фигуру пункта б)? Почему вы так считаете?
2. Изобразите равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и постройте треугольник, симметричный данному: а) относительно прямой AC ; б) относительно прямой BC ; в) относительно прямой AB .
В каждом случае какую геометрическую фигуру представляет собой объединение симметричных треугольников?
г) В какую фигуру можно перевести движением фигуру, полученную в пункте а)? Почему?
3. Изобразите равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и постройте симметричный ему треугольник относительно: а) прямой AB ; б) прямой BC ; в) прямой AC .
Какую геометрическую фигуру представляет собой объединение симметричных треугольников в каждом случае? В какую фигуру можно перевести движением полученную фигуру в пункте б)?

4. Изобразите теперь неравнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и выполните операции а) — в) пункта 3 задания. Что изменилось по сравнению с предыдущим сюжетом? Можно ли какую-нибудь из полученных фигур движением перевести в другие?

5. Как вы думаете, если взять разносторонний непрямоугольный треугольник ABC и выполнить операции а) — в) пункта 3, то могут ли быть среди полученных фигур равные? Почему?

6. а) Докажите, что прямая, проведённая через середины оснований равнобедренной трапеции, является осью симметрии трапеции.

б) Докажите, что прямая, содержащая биссектрису равнобедренного треугольника, проведённую к его основанию, является осью симметрии этого треугольника.

К 22

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

Изобразите два равных треугольника. Как осевыми симметриями перевести один треугольник в другой? Постройте оси симметрии, переводящие один треугольник в другой.

К 23

а) Докажите, что прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей прямоугольника перпендикулярно его сторонам, являются осями симметрии этого прямоугольника.

б) Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

в) Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности, является осью симметрии этой окружности.

К 24

Сколько осей симметрии имеет правильный n -угольник? Что это за прямые?

25

Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. На рисунке 4 отрезок AM — медиана треугольника ABD , $AC = 2AM$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

2. На рисунке 5: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, отрезок AM — медиана треугольника ABC . Найдите AM^2 .

3. а) На рисунке 6: $AB = AD$, AC — биссектриса угла BAD . Докажите, что 1) $\triangle ABC = \triangle ADC$; 2) в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

б) На рисунке 7: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $ABCD$ — ромб или дельтоид.

4. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности — принадлежит биссектрисе AD треугольника, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Докажите, что $\frac{AD}{OD} = \frac{b+c}{a}$.

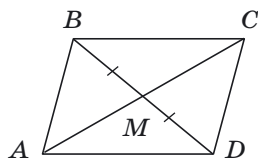


Рис. 4

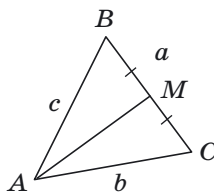


Рис. 5

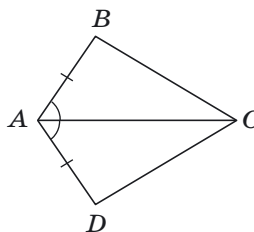


Рис. 6

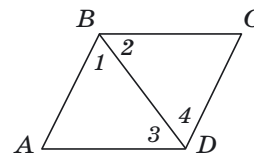


Рис. 7

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AB в точке D . Докажите, что $AD = p - BC$, где p — полупериметр треугольника.

П. 5.3

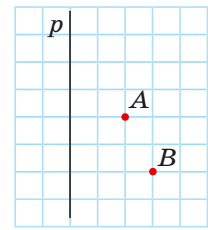


Рис. 8

К Т 26

Отметьте три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой. Постройте точку A' , в которую переходит точка A при параллельном переносе, переводящем точку B в точку C .

К Т 27

а) Изобразите равнобедренный треугольник (рис. 8), если точка B — вершина угла, прилежащего к его основанию, точка A принадлежит боковой стороне, прямая p содержит медиану треугольника.

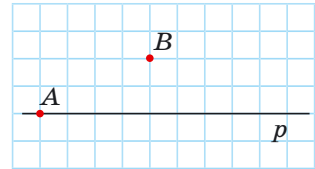


Рис. 9

б) Изобразите ромб по его вершинам A и B и прямой p , содержащей диагональ AC (рис. 9).

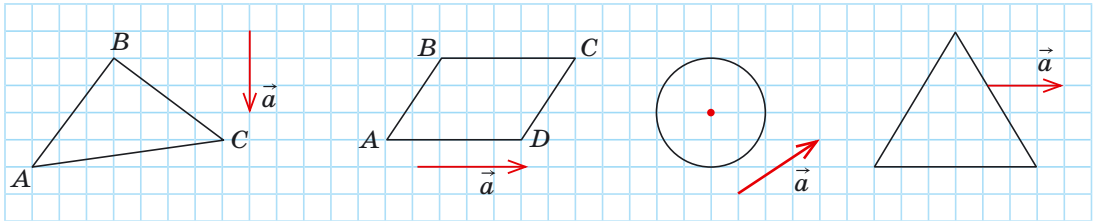


Рис. 10

К Т 28

Постройте геометрические фигуры, в которые перейдут данные фигуры (рис. 10) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$.

29

а) Параллельный перенос задан формулами: $x' = x + 2$; $y' = y - 1$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки $O(0; 0)$, $B(0; 1)$, $C(3; 2)$, $D(4; -1)$?

б) Параллельный перенос задан формулами: $x' = x - 3$; $y' = y + 2$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки $A(-1; -1)$, $B(2; 1)$, $C(3; -2)$, $D(4; -1)$?

30

Найдите величины a и b в формулах параллельного переноса $x' = x + a$; $y' = y + a$, если известно, что: а) точка $(3; 2)$ переходит в точку $(2; 5)$; б) точка $(-1; 0)$ переходит в точку $(3; 4)$; в) точка $(-2; -4)$ переходит в точку $(0; -1)$; г) точка $(0; 5)$ переходит в точку $(-1; -1)$.

31

Существует ли параллельный перенос, при котором: а) точка $(0; 1)$ переходит в точку $(-1; 0)$, а точка $(1; 2)$ переходит в точку $(3; 4)$; б) точка $(-1; 2)$ переходит в точку $(0; 1)$, а точка $(3; -1)$ — в точку $(4; 0)$?

К 32

а) Дана парабола $y = x^2 + 2$. Найдите координаты вершины параболы и уравнение её оси симметрии при параллельном переносе на вектор $\vec{a} \{2; 3\}$. б) Дана окружность $x^2 + y^2 = 9$. Запишите уравнение окружности, в которую перейдёт данная при параллельном переносе на вектор $\vec{a} (-4; 2)$.

33

Дан параллелограмм $ABCD$. Какой вектор задаёт параллельный перенос, при котором: а) сторона BC переходит в сторону AD ; б) сторона CD переходит в сторону AB .

34 а) Точка $A(3; -2)$ перешла в точку $A_1(-1; 2)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$ и точки B_1 , в которую перейдёт точка $B(2; 4)$ при этом параллельном переносе.

б) Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{2; -1\}$. Точка M перешла в точку $M_1(-5; -2)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Найдите координаты точки M .

35 Точки $A(1; 0)$, $B(2; 3)$, $C(3; 2)$, $D(2; -1)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точка пересечения диагоналей параллелограмма — точка O — перешла в точку $O_1(-1; 0)$. Найдите координаты вершин параллелограмма, в который перейдёт параллелограмм $ABCD$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$.

36 Точки A и B при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$, не коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$, перешли соответственно в точки A_1 и B_1 . Докажите, что AA_1B_1B — параллелограмм.

К Т 37 Используя параллельный перенос, постройте трапецию по её основаниям и диагоналям.

К Т 38 Населённые пункты A и B расположены на противоположных берегах реки (рис. 11). В каком месте следует построить мост MN , чтобы длина пути $AMNB$ была наименьшей (берега реки параллельны, мост перпендикулярен берегам)?

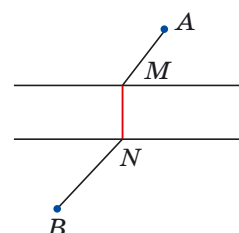


Рис. 11

К 39 Четыре населённых пункта расположены в вершинах параллелограмма. Планируется построить школу. В каком месте следует построить школу, чтобы сумма расстояний от неё до всех четырёх пунктов была наименьшей?

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. а) На рисунке 12 изображены окружности в прямоугольной системе координат. Пользуясь свойствами клетчатой бумаги, запишите в каждом случае уравнение окружности.

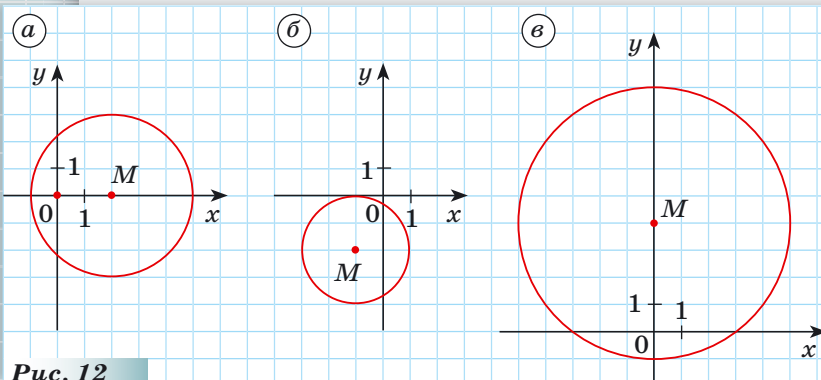


Рис. 12

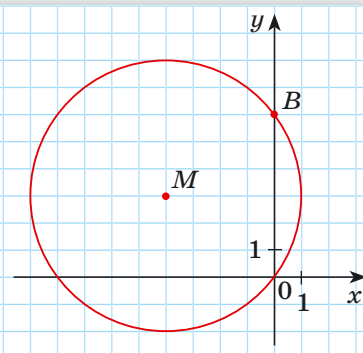


Рис. 13

2. На рисунке 13 изображена окружность в прямоугольной системе координат. Используя свойства клетчатой бумаги, запишите: а) уравнение данной окружности; б) уравнения прямых OM , MB ; в) уравнения касательных к окружности в точках O и B .

3. На рисунке 14 точки M , N , E — середины сторон треугольника ABC . Докажите, что $MO = ON$, $BO = OE$.

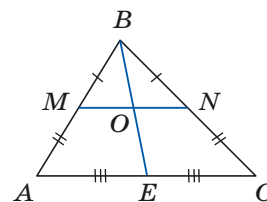


Рис. 14

4. Основания трапеции относятся как 2 : 3, её средняя линия равна 5. Найдите основания этой трапеции.

5. Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O , точки M и N — середины отрезков OC и OD . Докажите, что $\angle MAN = \angle MBN$.

6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O , точки M и N — середины отрезков OA и OC . Докажите, что углы MBN и MDN равны.

7. На рисунке 15 биссектриса угла A пересекает окружность в точке M . Докажите, что $AB \cdot AC = AD \cdot AM$.

8. На четырёх сторонах квадрата $ABCD$ последовательно отложены равные отрезки: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

9. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на отрезки 5 и 2. Найдите среднюю линию этой трапеции.

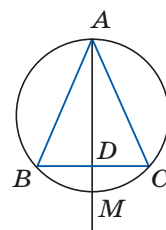


Рис. 15

П. 5.4

К Т 40 Даны точки A и O . Постройте точки, в которые переходит точка A при повороте вокруг точки O на угол: а) 45° ; б) 90° ; в) 30° ; г) 120° ; д) 180° .

К Т 41 На какой угол нужно повернуть прямую вокруг точки, не лежащей на этой прямой, чтобы полученная прямая была: а) параллельна исходной? б) перпендикулярна исходной?

42 Докажите, что при повороте вокруг своего центра окружность переходит в себя.

К Т 43 Дан отрезок AB . Постройте отрезок, в который переходит отрезок AB при повороте вокруг центра O на: а) угол 30° по часовой стрелке; б) угол 120° против часовой стрелки.

К 44 а) Правильный треугольник повернули на 60° вокруг его центроида. Какая фигура является общей частью полученного и исходного треугольников? б) При повороте на какой угол вокруг центроида равносторонний треугольник перейдёт в себя?

К 45 Докажите, что при повороте квадрата вокруг точки пересечения его диагоналей на угол 90° квадрат переходит в себя.

46 Какие из фигур (рис. 16) при повороте могут перейти в себя? Укажите центры и углы поворота.

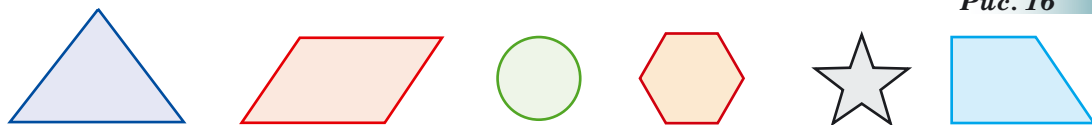


Рис. 16

К 47 а) Начертите треугольник ABC и постройте треугольник, симметричный данному относительно: а) точки A ; б) середины стороны AC .

К 48 а) Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является центром его симметрии.

б) Докажите, что центр окружности является центром её симметрии.

К 49 Найдите координаты точек, симметричных точкам $A(2; -1)$ и $B(-3; -4)$ относительно: а) начала координат; б) точки $M(-3; 1)$.

- К 50** Найдите x и y , если точки $A(2; y)$ и $B(x; -3)$ симметричны относительно:
а) точки $M(2; -1)$; б) начала координат.
- К 51** Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O . Укажите, в какие точки перейдут точки A , B и C при повороте вокруг точки O : а) на 90° ; б) на 180° .
- К 52** а) Докажите, что треугольник не имеет центра симметрии.
б) В каком случае правильный n -угольник имеет центр симметрии?
- К Т 53** Постройте параллелограмм $ABCD$ по двум соседним вершинам и точке пересечения его диагоналей.
- Т 54** Три посёлка A , B и C расположены в вершинах остроугольного треугольника. Где следует построить фабрику, чтобы сумма расстояний от неё до всех трёх пунктов была наименьшей?

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. а) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображены равнобедренные треугольники (рис. 17). В каждом случае найдите основание треугольника и его площадь.
б) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображены треугольники (рис. 18). Найдите площадь каждого треугольника.

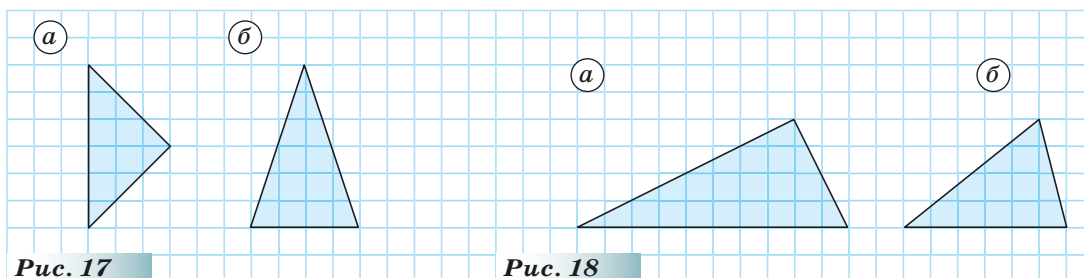


Рис. 17

Рис. 18

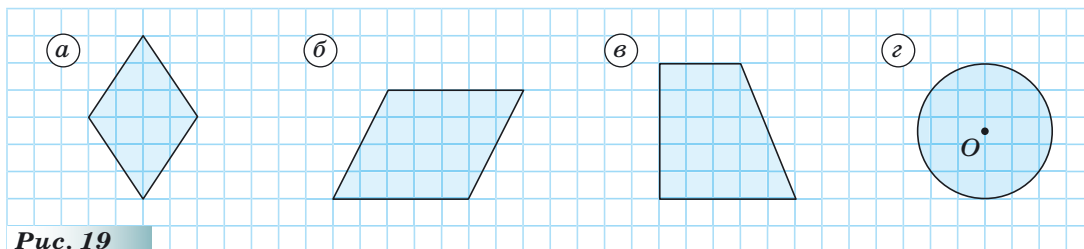


Рис. 19

2. Пользуясь свойствами клетчатой бумаги с размером клетки 1×1 , найдите площади фигур, изображённых на рисунке 19.
3. а) На рисунке 20: $AO : OC = DO : OB$. Докажите, что $AD \parallel BC$.
б) Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O . Найдите AB , если $OB = 4$ см, $OD = 10$ см, $DC = 25$ см.
4. а) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $CA = 10$ см. Большая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна $7,5$ см. Найдите две другие стороны треугольника $A_1B_1C_1$.
б) Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC , делит сторону AC в отношении $2 : 7$, считая от вершины A . Найдите стороны отсечённого треугольника, если $AB = 7,2$ см, $BC = 18$ см, $CA = 21,6$ см.

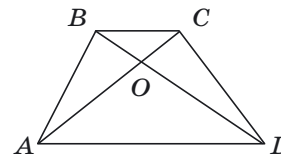


Рис. 20

5. а) Точки M , N и P лежат соответственно на сторонах AB , BC и CA треугольника ABC , причём $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$. Найдите стороны четырёхугольника $AMNP$, если $AB = 10$ см, $AC = 15$ см, $PN : MN = 2 : 3$.
- б) Точки M , N и P лежат соответственно на сторонах AB , BC и CA треугольника ABC , причём $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$. Найдите стороны четырёхугольника $AMNP$, если $AM = AP$, $AB = a$, $AC = b$.
6. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 18 см. Середина M стороны AB соединена с вершиной D . Найдите отрезки, на которые делится диагональ AC отрезком DM .
7. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K так, что $AK = \frac{1}{4} KD$. Диагональ AC и отрезок BK пересекаются в точке P . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника APK равна 1 см^2 .

П. 5.5

55 Фигура F' подобна фигуре F с коэффициентом подобия k . С каким коэффициентом фигура F подобна фигуре F' ?

- К 56** а) Верно ли, что если два угла подобны, то они равны?
б) Существуют ли прямые, которые переводятся гомотетией в себя?

57 Докажите, что: а) любые два квадрата подобны; б) любые две окружности подобны.

- Т 58** а) Подобны ли прямоугольники, образующие рамку фотографии (рис. 21)?
б) Средняя линия трапеции делит её на две трапеции. Будут ли подобны эти трапеции?

59 Придумайте с соседом по парте признаки подобия: а) параллелограммов; б) ромбов; в) равнобедренных трапеций.

60 Докажите, что любые два правильных многоугольника с одинаковым числом сторон подобны.

- К Т 61** а) Постройте отрезок, в который перейдёт отрезок AB (рис. 22) при гомотетии с центром O и: 1) $k = 2$; 2) $k = -1$.

б) Начертите отрезок AB и построьте отрезок, в который перейдёт отрезок AB при гомотетии с центром в точке A и $k = 1,5$.

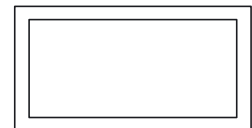


Рис. 21

- К Т 62** Начертите треугольник ABC и постройте треугольник, в который он перейдёт при гомотетии с коэффициентом k и центром: а) в точке B и $k = 2$; б) в точке A и $k = 0,5$; в) в середине AB и $k = -2$.

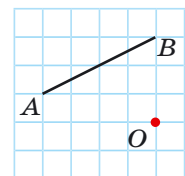


Рис. 22

- К 63** Начертите окружность радиуса 3 см с центром O и отметьте на ней точку M . Постройте окружность, в которую перейдёт данная при гомотетии: а) с центром в точке O и $k = 2$; б) с центром в точке M и $k = -0,5$.

- К 64** а) Начертите параллелограмм $ABCD$ и обозначьте точку пересечения его диагоналей буквой O . Постройте фигуру, в которую перейдёт параллелограмм $ABCD$ при гомотетии с центром в точке O и: а) $k = 2$; б) $k = -2$.

- К Т 65** На рисунке 23 изображена фигура F и центр гомотетии — точка A . Постройте фигуру F' , в которую

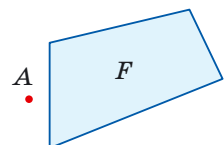


Рис. 23

перейдёт фигура F при этой гомотетии с центром A и $k = 3$ см.

66

Найдите координаты точек, в которые перейдут точки $A(1; 2)$ и $B(-3; 0)$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом: а) $k = 3$; б) $k = \frac{1}{3}$.

67

а) Окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2 касаются внешним образом в точке M (рис. 24). Докажите, что окружность с центром O_2 перешла в окружность с центром O_1 при гомотетии с центром M и коэффициентом $-\frac{R_1}{R_2}$.

б) Окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2 касаются внутренним образом в точке M (рис. 25). Докажите, что окружность с центром O_2 перешла в окружность с центром O_1 при гомотетии с центром M и коэффициентом $\frac{R_1}{R_2}$.

68

Углы A , B и C треугольника ABC связаны соотношениями $\angle B = 2\angle A$ и $\angle C = 2\angle B$. Докажите, что $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

К

69

Две окружности касаются внутренним образом, причём меньшая окружность проходит через центр большей. Докажите, что любую хорду большей окружности, выходящую из точки касания, меньшая окружность делит пополам.

К Т 70

а) Постройте треугольник по двум его углам и радиусу вписанной окружности.
б) Постройте треугольник по двум его углам и радиусу описанной окружности.

К

71

Отрезок MN — хорда окружности, A — произвольная точка этой окружности. Найдите геометрическое место точек, являющихся точками пересечения медиан треугольника MNA .

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. а) Стороны одного треугольника равны 4, 7 и 9. Найдите периметр треугольника, подобного данному, если коэффициент подобия равен 1,6. Сколько решений имеет задача?

б) Стороны одного треугольника равны 5, 6 и 8. Меньшая сторона второго треугольника, подобного первому, равна 15. Найдите остальные стороны второго треугольника.

2. а) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом подобия, равным 1,5. Основание AC треугольника ABC равно 20, а высота, проведённая к основанию, равна 9. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$. Рассмотрите оба возможных случая.

б) Площадь треугольника $A_1B_1C_1$, подобного треугольнику ABC с коэффициентом подобия 0,5, равна 24. Основание $A_1B_1 = 8$. Найдите сторону AB треугольника ABC .

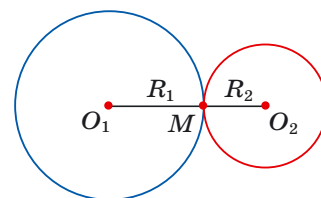


Рис. 24

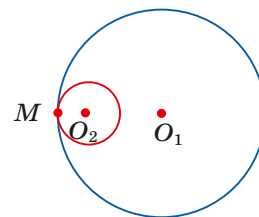


Рис. 25

3. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , делит сторону AB в отношении $2:5$, считая от вершины A . Найдите стороны отсечённого треугольника, если $AC = 8,4$, $BC = 21$, $AB = 14$.
4. На стороне AB треугольника ABC площадью 25 см^2 отмечена точка D такая, что $AD:DB = 2:3$. Найдите площадь треугольника ACD . Рассмотрите все возможные случаи.
5. Стороны треугольника равны 15, 20 и 25 см. Найдите медиану и высоту, проведённые к его большей стороне.
6. Две окружности касаются внешним образом. Расстояния от точки касания A этих окружностей до точек B и C касания данных окружностей с их общей внешней касательной равны соответственно 5 см и 12 см. Найдите BC .

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Что называют преобразованием фигуры F в фигуру F' . Приведите примеры преобразований: а) при которых сохраняется расстояние между точками; б) не сохраняется расстояние между точками.
- Какое преобразование называют движением? Назовите свойства движения. Приведите примеры движений.
- Докажите, что осевая симметрия является движением. Что значит: геометрическая фигура обладает осевой симметрией? Приведите примеры фигур, обладающих осевой симметрией, и укажите ось симметрии фигуры. Может ли фигура иметь более одной оси симметрии? Приведите практические примеры применения осевой симметрии.
- Какое преобразование плоскости называют параллельным переносом? Что называют параллельным переносом на вектор $\vec{a}$? Является ли параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ движением? Поясните свой ответ. Приведите примеры параллельного переноса из практической жизни.
- Объясните, какое преобразование плоскости называется поворотом вокруг данной точки на данный угол. Является ли поворот движением? Поясните свой ответ. Приведите примеры поворота из практической жизни.
- Какое движение называют центральной симметрией? Какую точку называют центром симметрии? Какие фигуры называют центрально-симметричными? Приведите пример фигур, обладающих центральной симметрией, и укажите центр симметрии фигуры. Может ли фигура иметь более одного центра симметрии? Может ли фигура обладать и осевой, и центральной симметрией? Приведите примеры.
- Какое отображение плоскости на себя называют преобразованием подобия? Что называют коэффициентом подобия? Какие свойства подобия вы знаете? Приведите примеры подобия из практической жизни.
- Какое отображение плоскости на себя называют гомотетией? Что такое центр и коэффициент гомотетии? Назовите основное свойство гомотетии.

ВЫПОЛНЯЕМ ТЕСТ

№ 1

Укажите, какие из утверждений верны.

- 1) Если длину прямоугольника увеличили в 5 раз, то и площадь прямоугольника увеличилась в 5 раз.
- 2) Любые три прямые имеют не менее одной общей точки.
- 3) В треугольнике против меньшей стороны лежит больший угол.
- 4) Около любого правильного многоугольника можно описать не более одной окружности.
- 5) Если две параллельные прямые пересечены секущей, то односторонние углы равны.
- 6) Медиана треугольника делит пополам угол, из вершины которого она проведена.
- 7) Диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам.
- 8) Отношение площадей подобных треугольников равно коэффициенту подобия.
- 9) Касательная к окружности параллельна радиусу, проведённому в точку касания.
- 10) Синус любого острого угла меньше 1.

№ 2

Укажите неверные утверждения.

- 1) Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы составляют в сумме 180° , то эти прямые параллельны.
- 2) Если треугольники имеют по одной равной стороне, то их площади относятся как высоты, проведённые к этим сторонам.
- 3) Через любую точку можно провести более одной прямой.
- 4) Если угол равен 30° , то смежный с ним угол равен 60° .
- 5) Если расстояние от точки до прямой больше 1, то и длина любой наклонной, проведённой из данной точки к этой прямой, больше 1.
- 6) Треугольник со сторонами 10, 15, 25 не существует.
- 7) Площадь ромба равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.
- 8) Средняя линия трапеции равна сумме её оснований.
- 9) Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла.
- 10) Любой прямоугольник можно вписать в окружность.

№ 3

Укажите, какие из утверждений неверны.

- 1) Если ромб и квадрат имеют одинаковые периметры, то площадь квадрата больше площади ромба.
- 2) Через точку, не принадлежащую прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.
- 3) Если две стороны треугольника равны 3 и 4, то его третья сторона меньше 7.
- 4) Если угол равен 53° , то смежный с ним угол равен 127° .

- 5) Если три угла одного треугольника соответственно равны трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- 6) Диагонали прямоугольника перпендикулярны.
- 7) Угол, вписанный в окружность, равен центральному углу, опирающемуся на ту же дугу.
- 8) Любой квадрат является прямоугольником.
- 9) Если в ромбе один из углов равен 90° , то такой ромб — квадрат.
- 10) Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним углов треугольника.

№ 4

Укажите неверные высказывания.

- 1) Сумма углов равнобедренного треугольника равна 180° .
- 2) Если диагонали параллелограмма равны, то это квадрат.
- 3) Тангенс любого острого угла меньше единицы.
- 4) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.
- 5) Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.
- 6) Каждая сторона треугольника меньше разности двух других его сторон.
- 7) Через любые три точки проходит ровно одна прямая.
- 8) Через любые две точки можно провести не менее одной прямой.
- 9) Каждая сторона треугольника не превосходит суммы двух других его сторон.
- 10) Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит хорду пополам.

№ 5

Укажите верные высказывания.

- 1) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов.
- 2) Для точки, лежащей на окружности, расстояние до центра окружности равно радиусу.
- 3) Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей.
- 4) В любом тупоугольном треугольнике есть острый угол.
- 5) Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.
- 6) Сумма смежных углов равна 90° .
- 7) Все диаметры окружности равны между собой.
- 8) Если два угла треугольника равны 40° и 70° , то третий его угол равен 70° .
- 9) Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей.
- 10) В равнобедренном треугольнике с основанием 8 боковая сторона не больше 4.

№ 6

Какие из утверждений неверны?

- 1) В треугольнике против меньшей стороны лежит меньший угол.
- 2) Любые две прямые имеют не менее одной общей точки.
- 3) Через точку, не принадлежащую прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.
- 4) Площадь треугольника меньше произведения двух его сторон.
- 5) Сумма углов любого треугольника равна 180° .

- 6) Центр описанной около треугольника окружности всегда лежит внутри этого треугольника.
- 7) В равнобедренном треугольнике имеется не более двух равных углов.
- 8) Все прямоугольные треугольники подобны.
- 9) Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.
- 10) Все точки плоскости, равноудалённые от заданной точки, лежат на одной прямой.

№ 7

Укажите верные утверждения.

- 1) Через любые две точки можно провести не менее одной окружности.
- 2) Если две прямые перпендикулярны к третьей прямой, то эти две прямые параллельны.
- 3) Если один угол треугольника больше 100° , то оба других его угла меньше 40° .
- 4) У треугольника все внешние углы могут быть тупыми.
- 5) Если две стороны треугольника равны 7 и 12, то третья его сторона больше 5.
- 6) Сумма углов прямоугольного треугольника равна 90° .
- 7) В тупоугольном треугольнике все углы тупые.
- 8) Через любую точку, лежащую вне окружности, можно провести две касательные к этой окружности.
- 9) Тангенс любого острого угла больше единицы.
- 10) Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

№ 8

Укажите верные утверждения.

- 1) В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180° .
- 2) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
- 3) $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$.
- 4) Центр вписанной в треугольник окружности находится в точке пересечения его медиан.
- 5) Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.
- 6) Если точка принадлежит оси абсцисс, то её абсцисса равна 0.
- 7) Окружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 4$, проходит через начало координат.
- 8) Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.
- 9) Многоугольник, у которого все стороны равны, — правильный.
- 10) В треугольнике обязательно есть угол, синус которого равен 1.

№ 9

Укажите верные утверждения.

- 1) Центры вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника совпадают.
- 2) Если при пересечении двух прямых секущей односторонние углы равны, то прямые параллельны.
- 3) Движение сохраняет расстояние между двумя точками.
- 4) Если длины векторов равны, то равны и векторы.

- 5) Если в уравнении прямой $ax + by + c = 0$ коэффициент c равен 0, то прямая проходит через начало координат.
- 6) Перпендикуляр меньше наклонной, проведённой к прямой из той же точки, что и перпендикуляр.
- 7) Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.
- 8) Площадь трапеции равна произведению её основания на высоту.
- 9) Синус и косинус угла треугольника могут иметь разные знаки.
- 10) Один из углов треугольника всегда не превышает 60° .

№ 10

Укажите неверные утверждения.

- 1) Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной около него окружности.
- 2) Если скалярное произведение двух векторов равно 0, то векторы перпендикулярны.
- 3) Если тангенсы углов треугольника равны, то такой треугольник является равнобедренным.
- 4) Прямая, заданная уравнением $9x - 5 = 0$, пересекает ось Ox .
- 5) Нулевой вектор — это вектор, у которого совпадают начало и конец.
- 6) Синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего этому углу катета к прилежащему ему катету.
- 7) Параллельный перенос не является движением.
- 8) Если косинус угла треугольника меньше нуля, то такой треугольник — тупоугольный.
- 9) От любой точки можно отложить вектор, равный данному.
- 10) Площадь параллелограмма меньше произведения его сторон.

№ 11

1. Чему равна площадь равностороннего треугольника со стороной 1?

- 1) $2\sqrt{3}$
- 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 3) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- 4) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

2. Чему равен угол AOB между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника ABC (рис. 1)?

3. На рисунке 1 биссектрисы AM и BD равны, углы MAC и DBC также равны, $\angle C = 90^\circ$. Какой признак равенства треугольников позволяет доказать равенство треугольников AMC и BCD ?

- 1) первый признак
- 2) второй признак
- 3) третий признак
- 4) ни один признак не применим

4. На рисунке 2 изображена трапеция $ABCD$. Укажите верное утверждение.

- 1) $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ подобны
- 2) $\triangle COB$ и $\triangle AOD$ подобны
- 3) $\triangle BOC$ и $\triangle DOC$ подобны
- 4) $\triangle ABC$ и $\triangle OAD$ подобны

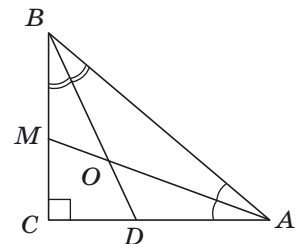


Рис. 1

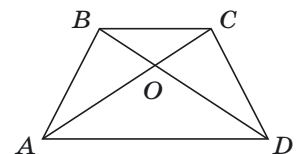


Рис. 2

5. Как изменится площадь параллелограмма, если одну из его смежных сторон увеличили в 4 раза, а другую уменьшили в 2 раза?

- 1) увеличится в 2 раза 2) увеличится в 4 раза
3) увеличится в 6 раз 4) увеличится в 8 раз

6. Сколько пар равных векторов определяют вершины квадрата?

- 1) 4 2) 6 3) 8 4) 12

7. Параллельные прямые a и b пересечены секущей c (рис. 3). Чему равен угол 1, если он на 38° меньше угла 2?

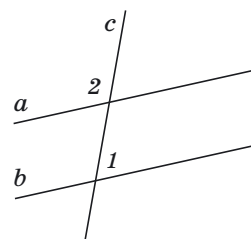


Рис. 3

№ 12

1. Чему равна площадь прямоугольного треугольника, в котором один из катетов равен 3 см, а гипотенуза равна 5 см?

- 1) 10 см^2 2) 5 см^2 3) 12 см^2 4) 6 см^2

2. В треугольнике ABC угол A равен 48° , биссектрисы углов B и C пересекаются в точке D . Чему равен угол CDB (рис. 4)?

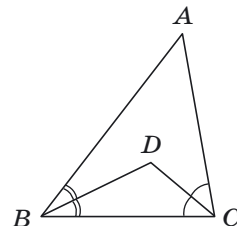


Рис. 4

3. В треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CH . Чему равна гипотенуза AB , если $BC = 8 \text{ см}$ и $BH = 4 \text{ см}$?

- 1) 32 см 2) 8 см 3) 16 см 4) 12 см

4. Выберите уравнение окружности с центром в точке $M(-3; 4)$, проходящей через начало координат.

- 1) $x^2 + y^2 = \sqrt{34}$ 2) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$
3) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ 4) $x^2 + y^2 = 25$

5. Сторона равностороннего треугольника ABC равна a . Найдите $|\vec{AB} + \vec{AC}|$.

- 1) a 2) $a\sqrt{2}$ 3) $a\sqrt{3}$ 4) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

6. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 12. Какую наибольшую площадь может иметь этот треугольник?

- 1) $36\sqrt{2}$ 2) $36\sqrt{3}$
3) 72 4) 144

7. На рисунке 5: $\angle 1 = 52^\circ$, $\angle 2 = 128^\circ$, $\angle 3 = 123^\circ$. Найдите $\angle 4$.

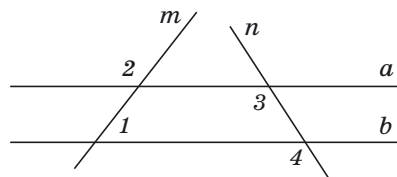


Рис. 5

№ 13

1. Параллельные прямые a и b пересечены секущей c . Найдите угол 1, если он в два раза больше угла 2 (рис. 6).

2. Стороны параллелограмма равны 3 см и 4 см, а один из углов параллелограмма равен 150° . Найдите площадь этого параллелограмма.

- 1) 6 2) $6\sqrt{3}$
3) 12 4) $12\sqrt{3}$

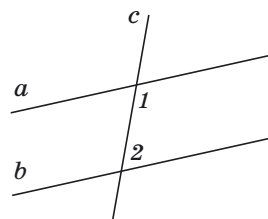


Рис. 6

3. Чему равна медиана AM треугольника ABC , вершины которого имеют следующие координаты: $A(3; -4)$, $B(-3; 2)$, $C(3; 4)$?

- 1) $\sqrt{58}$ 2) 8 3) $2\sqrt{15}$ 4) 7

4. Найдите площадь прямоугольного равнобедренного треугольника по его гипотенузе c .

- 1) $\frac{c^2}{2}$ 2) $\frac{c^2}{4}$ 3) $2c^2$ 4) $\sqrt{2}c^2$

5. В треугольнике ABC точки M и N — соответственно середины сторон AB и BC . Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BN}$.

- 1) $\vec{a} - \vec{b}$ 2) $\vec{b} - \vec{a}$ 3) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ 4) $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

6. Высота, проведённая из вершины A треугольника ABC , лежит внутри треугольника. Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Углы A и C острые 3) Угол A острый
2) Углы B и C острые 4) Углы A и B острые

7. Как изменится площадь круга, если его радиус увеличить в 3 раза?

№ 14

1. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, а внешний угол при вершине A равен 142° . Найдите градусную меру угла B .

2. Определите вид треугольника, две высоты которого лежат вне треугольника.

- 1) прямоугольный треугольник
2) остроугольный треугольник
3) тупоугольный треугольник

3. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и перпендикулярны. Известно, что отрезки AO и OB равны, а отрезки CB и AD лежат на параллельных прямых. Найдите отрезок CD , если $OD = 4$ см, $AO = 5$ см (рис. 7).

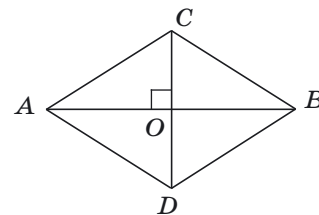


Рис. 7

4. Радиус окружности, описанной около правильного восьмиугольника, равен 1. Найдите сторону этого восьмиугольника.

- 1) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ 2) $2 - \sqrt{2}$ 3) $1 + \sqrt{2}$ 4) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

5. Чему равна площадь равностороннего треугольника, если его высота равна h ?

- 1) $\sqrt{3}h$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}h$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}h^2$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{12}h^2$

6. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если $A(-3; -1)$, $B(1; -4)$, $C(6; 8)$.

- 1) 63 2) -7 3) 9 4) -16

7. Найдите длину отрезка AB , концы которого имеют координаты $A(-2; 2)$ и $B(3; -1)$.

- 1) 6 2) $\sqrt{34}$ 3) 5 4) $\sqrt{30}$

№ 15

- Сколько векторов определяют вершины параллелограмма?
1) 4 2) 6 3) 8 4) 12
- Найдите площадь круга, диаметр которого равен 4 см.
1) π см² 2) 2π см² 3) 4π см² 4) 16π см²
- В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол B равен 20° . Чему равен внешний угол при вершине A ?
1) 100° 2) 120° 3) 80° 4) 110°
- Лучи AD и BM — биссектрисы внешних углов при вершинах A и B прямоугольного треугольника ABC . Определите взаимное расположение прямых AD и BM (рис. 8).
1) перпендикулярны
2) пересекаются, но не перпендикулярны
3) параллельны
- При гомотетии с коэффициентом 2 угол ABC , равный 36° , переходит в угол $A_1B_1C_1$. Чему равен угол $A_1B_1C_1$?
1) 18° 2) 36° 3) 72° 4) невозможно определить
- Один из соответственных углов, образованных при пересечении двух прямых a и b секущей c , больше другого. Определите взаимное положение прямых a и b .
- Треугольники ABC и MNO подобны, AB и MN — соответственные стороны. $AB : MN = 1 : 4$. Стороны треугольника ABC равны 5, 6, 7. Чему равен периметр треугольника MNO ?

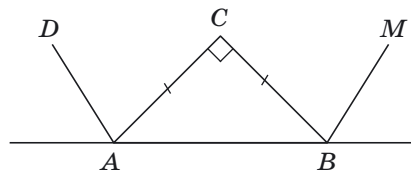


Рис. 8

№ 16

- Длина окружности равна 6π . Найдите площадь ограниченного ею круга.
1) 6π 2) $6\pi^2$ 3) 9π 4) 36π
- Во сколько раз площадь параллелограмма больше площади четырёхугольника, вершины которого находятся в серединах сторон данного параллелограмма?
1) в 2 раза 2) в 4 раза 3) в 8 раз 4) в 16 раз
- Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Какой из данных векторов равен вектору $\overrightarrow{OD}$?
1) $\overrightarrow{AO}$ 2) $\overrightarrow{BO}$ 3) $\overrightarrow{CO}$ 4) $\overrightarrow{DO}$
- Периметры правильных многоугольников с одинаковым количеством сторон относятся как $2 : 3$. Найдите отношение их площадей.
1) $4 : 9$ 2) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ 3) $2 : 3$ 4) $2 : 5$
- Сколько неравных векторов определяют вершины прямоугольника?
1) 2 2) 4 3) 8 4) 12
- В равностороннем треугольнике ABC проведены биссектриса AM и высота CH . Чему равен отрезок HM , если $BC = 20$ см?
1) 10 см 2) 40 см 3) 20 см 4) 30 см
- Площадь прямоугольного равнобедренного треугольника равна 24. Чему равна его гипотенуза?

№ 17

1. В треугольнике ABC внешние углы при вершинах A и C соответственно равны 150° и 100° . Чему равен угол B треугольника?

2. Точки A , B и C не лежат на одной прямой. Известно, что $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

- 1) прямоугольник 2) параллелограмм 3) трапеция 4) ромб

3. Найдите площадь правильного n -угольника, вписанного в круг радиуса R .

- 1) $n \cdot R^2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ 2) $\frac{1}{2} \cdot n \cdot R^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$
 3) $n^2 \cdot R^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ 4) $2n^2 \cdot R^2 \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$

4. В треугольнике ABC проведена медиана AM . Какой из векторов равен вектору $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CM}$?

- 1) $\overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{BM}$ 3) $\overrightarrow{MA}$ 4) $\overrightarrow{AM}$

5. Найдите радиус окружности, заданной уравнением

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 8 = 0.$$

- 1) $2\sqrt{5}$ 2) $\sqrt{19}$ 3) $\sqrt{21}$ 4) 5

6. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если $A(-3; -1)$, $B(1; -4)$, $C(6; 8)$.

- 1) 63 2) -7 3) 9 4) 18

7. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты: $(1; 4)$, $(3; 7)$, $(9; 4)$ (рис. 9).

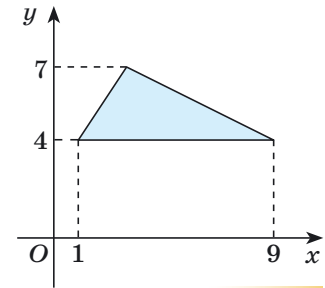


Рис. 9

№ 18

1. Хорда AB является стороной правильного четырёхугольника, вписанного в окружность радиуса 5. Чему равна сторона этого четырёхугольника?

- 1) 5 2) $5\sqrt{2}$ 3) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ 4) 10

2. В треугольнике ABC медиана BM образует со стороной AC острый угол. Сравните длины сторон AB и BC .

- 1) $AB < BC$ 2) $AB = BC$ 3) $AB > BC$ 4) невозможно сравнить

3. Синус угла треугольника равен единице. Определите вид треугольника.

- 1) остроугольный 2) тупоугольный
 3) прямоугольный 4) такого треугольника не существует

4. Чему равен модуль вектора $\vec{a} \{-3; 4\}$?

- 1) 1 2) 5 3) 7 4) $\sqrt{7}$

5. В параллелограмме $ABCD$: $AC = 9$, $BD = 13$. Найдите периметр треугольника BOC , если периметр треугольника ABC равен 28.

- 1) 34 2) 17 3) 32 4) 24

6. Середины сторон равнобедренной трапеции последовательно соединили отрезками. Найдите периметр полученного четырёхугольника, если известно, что диагональ трапеции равна 15.

- 1) 60 2) 45 3) 30 4) 15

7. Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (2; 3), (2; 6), (7; 9), (7; 6) (рис. 10).

№ 19

1. Параллелограмм имеет четыре оси симметрии. Определите его вид.

1) Ромб, отличный от квадрата; 2) квадрат; 3) прямоугольник, отличный от квадрата; 4) такого параллелограмма не существует.

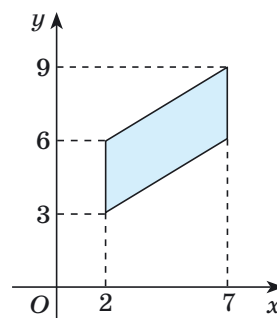


Рис. 10

2. Как изменится площадь прямоугольника, если одну из его сторон уменьшить в два раза, а другую увеличить в два раза?

1) увеличится в 4 раза 2) уменьшится в 2 раза
3) увеличится в 2 раза 4) не изменится

3. Какое из данных равенств верно?

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$
3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}$ 4) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$

4. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен $2\sqrt{3}$, а противолежащий ему угол равен 60° . Чему равна гипотенуза треугольника?

1) $4\sqrt{3}$ 2) $2\sqrt{6}$ 3) 12 4) 4

5. Установите соответствие между прямыми и их уравнениями.

А) $y = \frac{1}{2}x$ Б) $y = 2x$ В) $y = -\frac{1}{2}x$

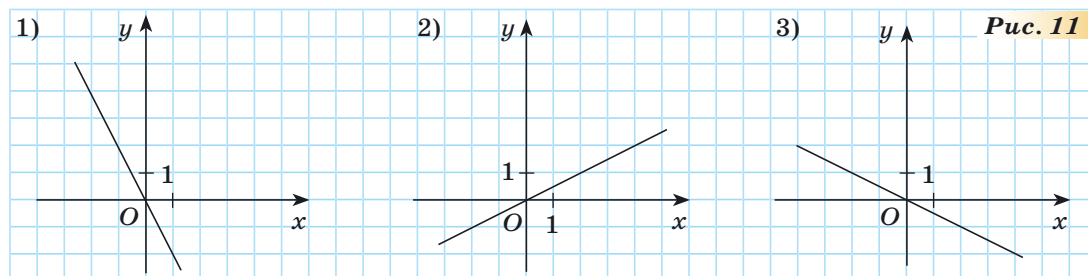


Рис. 11

В таблице под каждой буквой впишите соответствующий номер.

А	Б	В

6. Радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник, равен 18 см, а радиус описанной около него окружности равен $12\sqrt{3}$. Сколько сторон у этого многоугольника?

1) 9 2) 12 3) 18 4) 6

7. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты: (4; 2), (2; 6), (11; 6), (7; 2) (рис. 12).

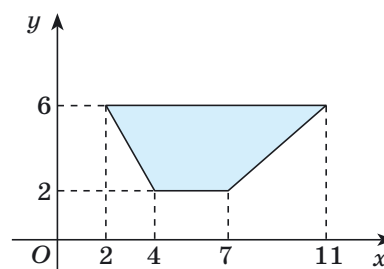


Рис. 12

ПРОЕКТЫ, КОТОРЫЕ МЫ РЕКОМЕНДУЕМ

1. Готовимся к походу.
2. Великий математик древности Аполлоний Пергский и влияние его труда «Конические сечения» на развитие математики.
3. Создаём геометрические паркеты.
4. Геометрические методы решения алгебраических задач.
5. Небесная геометрия древних.
6. Определяем центр тяжести с помощью математики.
7. Этюды о симметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волошинов А. В. Математика и искусство / А. В. Волошинов. — М. : Просвещение, 2000.
2. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения / М. Гарднер. — М. : Мир, 1999.
3. Гарднер М. Математические новеллы / М. Гарднер. — М. : Мир, 2000.
4. Глейзер Г. И. История математики в школе / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1964 или на сайте <http://ilib.mccme.ru>
5. Левитин К. Е. Геометрическая рапсодия / К. Е. Левитин. — М. : Знание, 1976, или М. : Камерон, 2004, или на сайте <http://ilib.mccme.ru>.
6. Начала Евклида. Книги I—IV / Пер. с греч. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. — М. ; Л. : ГТТИ, 1948 или на сайте <http://ilib.mccme.ru>
7. Перельман Я. И. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М. ; Л. : ГТТИ, 1950 или на сайте <http://ilib.mccme.ru>
8. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. — М. : МЦНМО, 2007.
9. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия / И. Ф. Шарыгин. — М. : Наука, 1982 или на сайте <http://ilib.mccme.ru>
10. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика / Гл. ред. М. Д. Аксёнова. — М. : Аванта+, 2003.

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ:

Для выполнения заданий в компьютерной среде можно воспользоваться компьютерными средами Geogebra (<https://www.geogebra.org/>), «Живая математика» (<http://www.uchportal.ru/load/24-1-0-2276>).

<http://mathnet.ru>
<http://fcior.edu.ru/>
<http://etudes.ru>
<http://school-collection.edu.ru/>

<http://kvant.info>
<http://ege.edu.ru>
<http://math.ru/lib/>

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$\alpha \downarrow$	$\sin \alpha \downarrow$	$\operatorname{tg} \alpha \downarrow$	$\operatorname{ctg} \alpha \downarrow$	$\cos \alpha \downarrow$	
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90
1	0,0175	0,0175	57,3	1,000	89
2	0,0349	0,0349	28,6	0,999	88
3	0,0523	0,0524	19,1	0,999	87
4	0,0698	0,0699	14,3	0,998	86
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85
6	0,1045	0,1051	9,51	0,995	84
7	0,1219	0,1228	8,14	0,993	83
8	0,139	0,141	7,11	0,990	82
9	0,156	0,158	6,31	0,988	81
10	0,174	0,176	5,67	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,90	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,28	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	$\cos \alpha \uparrow$	$\operatorname{ctg} \alpha \uparrow$	$\operatorname{tg} \alpha \uparrow$	$\sin \alpha \uparrow$	$\alpha \uparrow$

Учебное издание

Серия «Сферы»

Берсенев Александр Анатольевич
Сафонова Наталья Васильевна

ГЕОМЕТРИЯ

9 класс

Учебник

Санкт-Петербургский филиал

Ответственный за выпуск *Г. С. Скорospelкина*

Редакторы *Н. В. Сафонова, А. В. Каплиёв*

Художественные редакторы *С. Г. Куркина, Е. Н. Морозов*

Художники *С. Г. Куркина, Д. Ю. Герасимов, Е. Н. Морозов*

Фотографии *ООО «Фотобанк Лори»*

Компьютерная вёрстка *Д. Ю. Герасимова, Е. В. Саватеевой*

Дизайн обложки *О. В. Поповича, С. Г. Куркиной, А. А. Жилина*

Технические редакторы *С. В. Терехова, Е. В. Саватеева*

Корректоры *А. В. Локтионова, Е. А. Воеводина, И. В. Чернова, Е. Д. Светозарова*

Формат $84 \times 108/_{16}$. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 18,48. Уч.-изд. л. 11,67.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».

Российская Федерация, 127473, г. Москва,

ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Санкт-Петербургский филиал

Акционерного общества «Издательство «Просвещение».

Российская Федерация, 190000, г. Санкт-Петербург, Литейный пр., д. 37-39.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — vopros@prosv.ru